



# Diffusion, localisation et absorption de lumière en milieux désordonnés. Impact des corrélations spatiales du désordre

Olivier Leseur

## ► To cite this version:

Olivier Leseur. Diffusion, localisation et absorption de lumière en milieux désordonnés. Impact des corrélations spatiales du désordre. Optique [physics.optics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. <NNT : 2016PA066107>. <tel-01390680>

**HAL Id: tel-01390680**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01390680>**

Submitted on 2 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Diffusion, localisation et absorption de lumière en milieux désordonnés. Impact des corrélations spatiales du désordre.

*Thèse présentée pour l'obtention du grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

**Spécialité : Physique**

(ED564 : « Physique en Île-de-France »)

préparée à l'Institut Langevin « Ondes et Images »

*par*

**Olivier Leseur**

*Soutenue le 17 Juin 2016 devant le jury composé de*

M.	<b>Rémi Carminati</b>	<i>Directeur</i>
M.	<b>Sylvain Gigan</b>	<i>Examineur</i>
M.	<b>Fabrice Mortessagne</b>	<i>Rapporteur</i>
M.	<b>Romain Pierrat</b>	<i>Invité</i>
M <sup>me</sup>	<b>Anne Sentenac</b>	<i>Examinatrice</i>
M.	<b>Bart van Tiggelen</b>	<i>Rapporteur</i>



# Résumé

Dans cette thèse, différents aspects de la propagation de lumière en milieux hétérogènes sont abordés. Dans un premier temps, les concepts et les outils fondamentaux de la propagation des ondes en milieux désordonnés sont rappelés.

Ensuite, le régime de localisation d'Anderson est abordé pour des systèmes bidimensionnels ouverts. La localisation est mise en évidence de manière simple à partir du calcul de la figure de speckle transmis par une réalisation unique du désordre et en faisant varier les conditions d'illumination. Les régimes localisé et diffusif sont alors nettement différenciés, permettant d'introduire un nouveau critère pour la localisation.

Puis, un régime dilué dans lequel les corrélations du désordre jouent un rôle important est étudié. En particulier, l'étude se concentre sur les milieux hyperuniformes, qui permettent de montrer de manière spectaculaire comment les corrélations peuvent changer les propriétés de diffusion d'un milieu jusqu'à le rendre totalement transparent. L'influence des corrélations du désordre sur le coefficient d'absorption d'un milieu désordonné est également envisagée, elle s'avère être modérée.

La dernière partie s'intéresse aux fluctuations du taux d'émission d'un émetteur de type molécule fluorescente enfoui dans un milieu désordonné en fonction de sa position. Cette corrélation spatiale d'un nouveau genre permet d'obtenir de manière découplée des informations sur les détails microscopiques du milieu (corrélations) et l'environnement local de la source.

## Mots-clés

Densité locale d'états électromagnétique, Localisation d'Anderson, Corrélations de speckle, Milieux hyperuniformes, Milieux désordonnés corrélés, Absorption



# Summary

In this thesis, different aspects of wave propagation in complex media are addressed. First, basic concepts and tools of the propagation of waves in disordered media are reminded.

Then, the Anderson localization regime is tackled for two-dimensional open systems. The localization is highlighted in a simple way from a calculation of the transmitted speckle pattern for a single configuration of the disorder with varying illumination conditions. Localized and diffused regimes are clearly differentiated, allowing to introduce a new criteria for localization.

Next, a weak scattering regime for which correlations of the disorder play a significant role is investigated. Namely, the study is focused on hyperuniform materials, where correlations are such that they are transparent compared with their uncorrelated equivalent. The influence of the correlations of the disorder on the absorption coefficient is also considered, but it is found to be moderated.

The final part is dedicated to the fluctuations of the decay rate of an emitter, (e. g. fluorescent molecule), embedded in a disordered medium as a function of its position. This new type of spatial correlation allows to extract information on the microscopic details of the medium (correlations) and the local environment of the source in an uncoupled way.

## Keywords

Electromagnetic local density of states, Anderson localization, Speckle correlations, Hyperuniform medium, Correlated disordered medium, Absorption



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Concepts fondamentaux de la propagation des ondes en milieux désordonnés</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Théorie de la diffusion multiple . . . . .	16
2.2.1	Équation d'onde et fonction de Green . . . . .	16
2.2.2	Densité locale d'états (LDOS) . . . . .	18
2.2.3	Équation de Lippman-Schwinger . . . . .	19
2.2.4	Diffuseurs ponctuels . . . . .	20
2.2.5	Développement en essaim et speckle . . . . .	23
2.3	Grandeurs moyennées . . . . .	24
2.3.1	Développement en essaim et moyenne . . . . .	26
2.3.2	Description diagrammatique . . . . .	28
2.3.3	Champ moyen et équation de Dyson . . . . .	29
2.3.4	Intensité moyenne et équation de Bethe-Salpeter . . . . .	30
2.3.5	Équation de transfert radiatif en régime stationnaire . . . . .	31
2.3.6	Interprétation physique des termes de l'ETR en régime stationnaire . . . . .	33
2.4	Conclusion . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Un critère original pour sonder la localisation d'Anderson sans statistique</b>	<b>37</b>
3.1	Introduction . . . . .	37
3.1.1	Interférences en milieu désordonné . . . . .	37
3.1.2	Historique de la localisation d'Anderson . . . . .	38
3.2	Analyse spectrale de la localisation . . . . .	42
3.2.1	Système et méthode de calcul . . . . .	42
3.2.2	Spectres en transmission . . . . .	43
3.2.3	Spectres de LDOS . . . . .	44
3.3	Manifestation de la localisation d'Anderson sur une seule configuration du désordre . . . . .	45
3.3.1	Étude du speckle en transmission . . . . .	45
3.3.2	Un nouveau critère pour la localisation d'Anderson . . . . .	46
3.4	Conclusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Structures hyperuniformes : propriétés géométriques et génération numérique</b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Facteur de structure . . . . .	50
4.3	Mesure de l'ordre dans un arrangement de points . . . . .	54
4.3.1	Fluctuations de densités normalisées . . . . .	54
4.3.2	Définition d'un arrangement de points hyperuniforme . . . . .	55
4.3.3	Lien avec le facteur de structure . . . . .	55
4.4	Méthode de génération des milieux hyperuniformes . . . . .	56
4.4.1	Principe de la méthode . . . . .	56



4.4.2	Génération numérique de structures hyperuniformes . . . . .	59
4.4.3	Robustesse des configurations . . . . .	60
4.5	Conclusion . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Propagation d'ondes dans un milieu hyperuniforme désordonné</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Système retenu . . . . .	64
5.3	Étude dans le régime de diffusion simple . . . . .	68
5.3.1	Intensité diffusée, facteur de structure et sphère d'Ewald . . . . .	68
5.3.2	Simulations numériques de l'intensité diffusée . . . . .	69
5.4	Étude dans le régime de diffusion multiple . . . . .	70
5.4.1	Lien entre facteur de structure et fonction de phase . . . . .	70
5.4.2	Condition pour avoir un matériau hyperuniforme transparent . . . . .	72
5.4.3	Résultats numériques . . . . .	73
5.5	Au-delà de l'hyperuniformité . . . . .	74
5.6	Conclusion . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Effet des corrélations du désordre sur l'absorption</b>	<b>77</b>
6.1	Introduction . . . . .	77
6.2	Calcul des coefficients d'extinction $\mu_{\text{ext}}$ , de diffusion $\mu_{\text{sca}}$ et d'absorption $\mu_{\text{abs}}$ . . . . .	78
6.2.1	Système d'intérêt . . . . .	78
6.2.2	Principe du calcul . . . . .	79
6.2.3	Calcul du coefficient d'extinction $\mu_{\text{ext}}$ pour un milieu désordonné corrélé . . . . .	82
6.2.4	Calcul du coefficient de diffusion $\mu_{\text{sca}}$ pour un milieu désordonné corrélé . . . . .	83
6.3	Calcul semi-analytique de $\mu_{\text{ext}}$ , $\mu_{\text{sca}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ pour un milieu désordonné corrélé . . . . .	86
6.3.1	Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ et $\mu_{\text{sca}}$ sans absorption . . . . .	86
6.3.2	Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ , $\mu_{\text{sca}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ en présence d'absorption . . . . .	87
6.4	Évaluations numériques de $\mu_{\text{ext}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ . . . . .	89
6.4.1	Évaluations numériques de $\mu_{\text{ext}}$ . . . . .	89
6.4.2	Évaluation numérique de $\mu_{\text{abs}}$ . . . . .	90
6.5	Conclusion . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Corrélations spatiales du taux de désexcitation d'un émetteur fluorescent dans un milieu désordonné corrélé</b>	<b>95</b>
7.1	Introduction . . . . .	95
7.2	Grandeurs statistiques associées au taux de désexcitation . . . . .	96
7.3	Étude en régime diffusion simple . . . . .	98
7.3.1	Calcul numérique de $C_{\Gamma}$ . . . . .	98
7.3.2	Calcul analytique de $C_{\Gamma}$ . . . . .	100
7.4	Étude en régime de diffusion multiple . . . . .	102
7.5	Conclusion . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>
<b>A</b>	<b>Théorie auto-cohérente et longueur de localisation pour des ondes scalaires en deux dimensions</b>	<b>107</b>
A.1	Théorie auto-cohérente construite à partir d'une approche diagrammatique . . . . .	107
A.2	Expression de la longueur de localisation . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Évaluation numérique de fonctions de corrélations de paire pour un milieu désordonné corrélé</b>	<b>113</b>

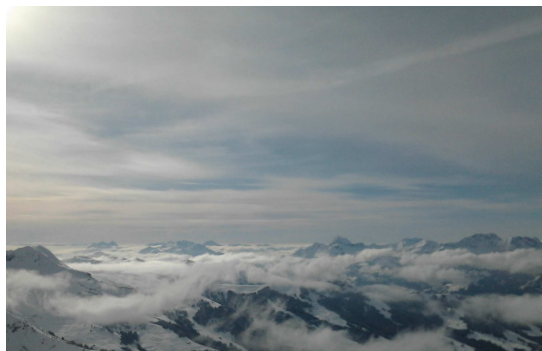
# Chapitre 1

## Introduction générale

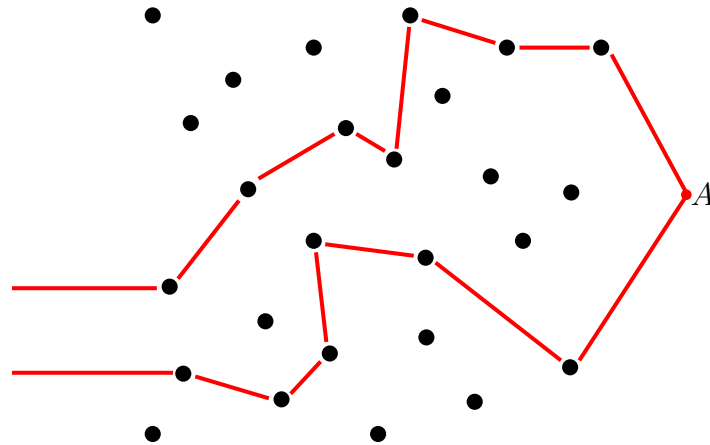
2015 a été déclarée année internationale de la lumière par l'UNESCO. Ce choix a été motivé par la chronologie de l'histoire scientifique de la lumière. Vers 1015, Ibn Al-Haytham publie un premier traité sur l'optique géométrique. En 1815, Augustin Fresnel propose pour la première fois une théorie ondulatoire pour la lumière par des expériences de diffraction. En 1865 James Clerk Maxwell introduit la théorie de l'électromagnétisme permettant de décrire aussi la lumière. En 1916, Albert Einstein montre le rôle essentiel de la lumière dans l'étude de l'espace-temps avec la relativité générale. Enfin en 1965 Arno Penzias et Robert Wilson découvrent le rayonnement fossile, livrant une partie des secrets de la jeunesse de l'univers. Il existe bien sûr de nombreuses autres dates et événements dans l'histoire de la lumière. Citons notamment la description quantique de l'interaction de la lumière avec la matière avec la mise au point du LASER (pour « Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation ») en 1960, ou encore la découverte en 1895 des rayons X par Wilhelm Röntgen et ses applications en radiocristallographie ou en imagerie médicale.

Un autre domaine d'intérêt riche d'enseignements fondamentaux sur la lumière et porteur de nombreuses applications est l'interaction de la lumière avec les milieux désordonnés ou hétérogènes. En effet de nombreux milieux naturels et artificiels se présentent sous forme désordonnée. C'est le cas, par exemple, de la neige, des nuages, de certains milieux biologiques ou encore du lait. La Fig. 1.1 montre des exemples de tels milieux en montagne.

Les milieux désordonnés artificiels sont aussi très courants car ils conduisent à de nombreuses applications, notamment pour les objets de couleur blanche. Le papier et la peinture sont les deux exemples les plus représentatifs. Cependant ces milieux trouvent d'autres applications dans des secteurs plus inattendus comme l'agroalimentaire. Des nanoparticules d'oxyde de titane sont en effet utilisées comme additif alimentaire (E171) pour renforcer la couleur blanche dans les préparations



**Figure 1.1** – Les milieux naturellement diffusants sont très nombreux, notamment en montagne avec les nuages et la neige.

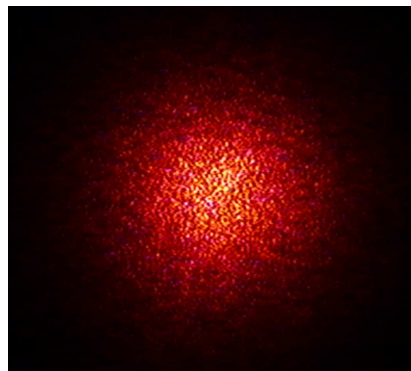


**Figure 1.2** – Schéma simplifié illustrant la propagation de la lumière dans un milieu désordonné. La lumière rentre par la gauche et se reflète sur les différentes hétérogénéités avant d'atteindre le point *A*. Ces hétérogénéités sont symbolisées par des ronds noirs et peuvent avoir des formes, des tailles et des propriétés optiques variées. Il existe de multiples façons pour la lumière d'atteindre ce point, deux sont représentées, elles donnent lieu à des interférences constructives ou destructives.

alimentaires, les cosmétiques et les produits pharmaceutiques.

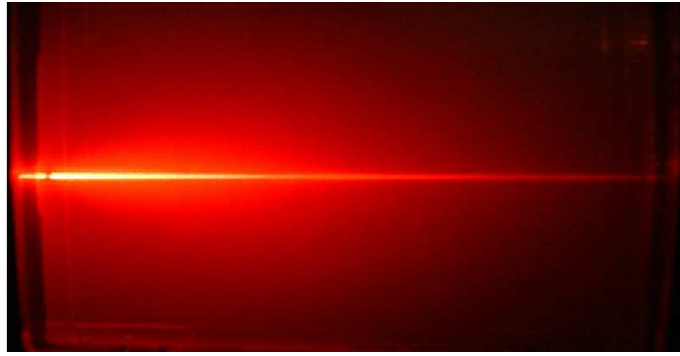
Afin d'illustrer l'interaction entre la lumière et un milieu désordonné, considérons un premier exemple comme un morceau de sucre ou une feuille de papier. Ces deux milieux comptent de nombreuses hétérogénéités par lesquelles la lumière est multiplement diffusée. La Fig. 1.2 présente un schéma simplifié d'un milieu complexe où la lumière se propage en étant diffusée sur les hétérogénéités, deux exemples de chemins de diffusion sont présentés.

L'ensemble de ces processus donnent lieu à des interférences constructives ou destructives en chaque point de l'espace. C'est ainsi qu'en regardant l'intensité transmise sur un écran, une figure d'interférences complexe est observée, elle est appelée figure de speckle (ou tavelure en français). Un exemple est donné sur la Fig 1.3, cette figure a été mesurée en transmission sur un échantillon désordonné de billes de silice. Il est néanmoins essentiel de noter que le processus aboutissant à une figure de speckle est déterministe : en chaque point la phase, l'amplitude et la polarisation de l'onde sont parfaitement définies.



**Figure 1.3** – Exemple de figure de speckle transmis par un échantillon de  $70\ \mu\text{m}$ , composé de billes de silice de  $400\ \text{nm}$  de diamètre, éclairé par un laser He-Ne (mesure réalisée par E. Perros).

Toutefois il est rare d'observer une figure de speckle, surtout en milieu naturel. En général, un milieu complexe est uni, blanc et opaque quelque soit la direction d'observation, c'est le cas, par exemple d'un nuage. En effet, un nuage n'est pas un objet statique, les gouttelettes qui le constituent se déplacent dans le temps sous l'action de la pesanteur et en interagissant les unes avec les autres. Ce



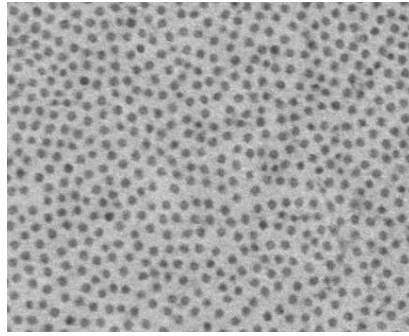
**Figure 1.4** – Propagation d'un faisceau LASER dans du lait, la partie balistique s'amortit sur une distance caractéristique correspondant au libre parcours moyen. L'énergie ainsi perdue par diffusion est alors la source d'un halo diffus.

qui est finalement vu est une moyenne de l'ensemble des figures de speckle instantanées, il en résulte un halo de lumière diffus. La Fig. 1.4 illustre cet effet en montrant comment se propage un faisceau LASER dans du lait. En progressant dans le milieu, chaque hétérogénéité dévie une partie de la lumière incidente, la partie balistique de la lumière s'amortit alors sur une distance caractéristique correspondant au libre parcours moyen de diffusion  $\ell_{\text{sca}}$ . De manière qualitative,  $\ell_{\text{sca}}$  donne la distance moyenne parcourue entre deux événements de diffusion.

Les exemples de milieux évoqués précédemment sont dit dilués et sont tels que le libre parcours moyen de diffusion  $\ell_{\text{sca}}$  est grand devant la longueur d'onde. Ces milieux sont les plus courants. Citons par exemple les tissus biologiques, en première ligne pour l'étude de la propagation des ondes, en vu d'applications pour l'imagerie médicale et la médecine. Dans un tel milieu, le libre parcours moyen est de l'ordre du millimètre pour les ondes optiques ce qui rend, par exemple, impossible l'observation des os au travers des organe. Il est néanmoins possible de faire d'excellentes études en surface des milieux biologiques, par exemple avec l'optique cohérente [1]. Une autre possibilité est de placer des émetteurs, comme par exemple des molécules fluorescentes, dans le milieu. L'interaction de ces émetteurs avec leur environnement va modifier leur taux d'émission. En analysant la statistique du taux d'émission il est possible d'obtenir des informations sur l'environnement local de la source et le détail microscopique du milieu [2].

Récemment, au-delà de la simple compréhension de la propagation des ondes en milieux complexes, un nouvel enjeu a émergé : il s'agit du contrôle de la propagation des ondes. Une première possibilité est d'utiliser le déterminisme évoqué précédemment de manière à ce que les ondes diffusées soient interfèrent constructivement ou destructivement. Une manière de faire consiste à contrôler l'illumination, ce qui a été réalisé avec succès avec des dispositifs de contrôle de front d'onde [3]. Une autre possibilité consiste à contrôler directement le milieu de sorte que les positions des hétérogénéités conduisent à des propriétés de propagation singulières. Par exemple, l'arrangement en cristal d'un milieu permet de lui conférer certaines propriétés optiques, comme des bandes interdites photoniques [4, 5].

Cependant, il n'est pas nécessaire que la structuration du milieu soit périodique pour observer des propriétés remarquables, la présence d'un ordre partiel peut suffire. Un exemple d'un tel milieu est la cornée [6]. Une image de ce système est proposée sur la Fig 1.5. Dans cette structure ce sont les propriétés de diffusion qui sont modifiées par les corrélations entre les positions des fibres de collagènes qui la composent. Ces corrélations affectent le libre parcours moyen de diffusion, il est alors significativement plus grand que si ces corrélations étaient absentes et surtout plus grand que la taille de la cornée, qui est alors transparente. Une maladie courante de la cornée consiste d'ailleurs en une altération de ces corrélations, conduisant à une réduction du libre parcours moyen, la cornée est alors d'apparence laiteuse.



**Figure 1.5** – Image TEM d’un arrangement de fibrilles de collagène dans la cornée humaine (par G. Latour).

L’absorption des ondes, optiques notamment, constitue également un grand domaine d’application. En particulier pour la conversion d’énergie photovoltaïque. Dans ce domaine, le coefficient d’absorption d’un matériau est une des grandeurs d’intérêt car il permet de quantifier la part de lumière convertie en énergie électrique. Récemment, les milieux désordonnés ont suscité l’intérêt pour l’absorption. En effet, ils peuvent présenter des performances plus intéressantes que les structures périodiques [7].

La propagation des ondes ne peut pas toujours être décrite de manière diffusive, comme c’est le cas pour les systèmes dilués. En utilisant un modèle de liaison forte, P. W. Anderson a montré que pour les électrons un régime très différent existait où les états propres sont localisés conduisant à une absence de diffusion [8]. Ce régime apparaît lorsque le libre parcours moyen est du même ordre que la longueur d’onde et est appelé la localisation d’Anderson. Elle a été observée pour les électrons [9], elle l’a été aussi pour les ondes de matière [10] ou encore les ultrasons [11]. Le cas des ondes optiques est plus délicat, surtout en dimension trois. Le rôle des non-linéarités [12], de l’absorption [13] ou du caractère vectoriel des ondes dans la localisation n’est pas encore bien compris [14].

Les travaux présentés dans ce manuscrit sont effectués dans les deux régimes présentés, à savoir les régimes diffus et localisés. Tout d’abord, le chapitre 2 commence par rappeler les concepts fondamentaux de la propagation d’ondes en milieux désordonnés. Les outils permettant de décrire l’interaction entre la lumière et la matière sont ainsi introduits, notamment l’équation de Helmholtz, l’équation de Lippman-Schwinger et la densité locale d’états électromagnétiques. La façon de décrire le désordre est ensuite présentée. Dans tout le manuscrit les milieux désordonnés sont constitués de diffuseurs ponctuels répartis avec ou sans corrélations dans le vide. Les équations fondamentales de la propagation d’ondes en milieux désordonnés, comme les équations de Dyson, Bethe-Salpeter et l’Équation de Transfert Radiatif, sont ensuite présentées.

La chapitre 3 se focalise ensuite sur le régime de localisation d’Anderson. Jusqu’à présent, l’essentiel des études menées sur la localisation ont porté sur des grandeurs moyennées sur les configurations du désordre, la conductance notamment, puisque pour les électrons ce sont les seules grandeurs accessibles. En particulier, il n’est pas possible de mesurer une figure de speckle, ce qui n’est pas le cas pour la lumière. Ce chapitre s’intéresse donc aux propriétés du speckle transmis en régime localisé pour des ondes scalaires en dimension deux, afin de déterminer une signature de la localisation sur une configuration unique du désordre. À partir de cette étude un nouveau critère pour la localisation d’Anderson est envisagé.

La suite du manuscrit s’intéresse au régime dilué et étudie l’influence des corrélations du désordre sur la propagation des ondes dans un milieu. Dans les chapitres 4 et 5, une classe particulière de milieux désordonnés corrélés est introduite, il s’agit des milieux hyperuniformes. Ces milieux sont définis à partir de leurs facteurs de structure, celui-ci tend vers zéro pour les grandes longueurs d’ondes. Ces milieux ont d’abord été étudiés pour leur propriétés géométriques et ont récemment suscité l’intérêt

pour l'optique, où des bandes interdites complètes y ont été numériquement observées. Dans ces chapitres, une classe de milieux hyperuniformes particulière est étudiée, celle pour laquelle le facteur de structure est nul sur toute une zone du réseau réciproque. Tout d'abord, une méthode de génération numérique de ces milieux est exposée, puis on s'intéresse ensuite à leurs propriétés de diffusion. Le lien entre le libre parcours moyen et le facteur de structure est rappelé. C'est ici que réside l'intérêt des milieux hyperuniformes, leurs facteurs de structure étant nul, on s'attend à ce que la propagation de la lumière change radicalement par rapport au cas de milieux non corrélés. On propose ainsi une étude détaillée de cette possibilité et on montre dans quelle mesure les corrélations du désordre peuvent changer un milieu opaque en un milieu transparent en réarrangeant les hétérogénéités qui le composent.

Puisque les propriétés de transport de la lumière peuvent être significativement influencées par l'ordre local du milieu, il est légitime de se demander dans quelles mesures les propriétés d'absorption peuvent elles aussi être modifiées. Le chapitre 6 s'intéresse à cette question et constitue une première étape de l'étude de l'absorption dans les milieux désordonnés corrélés. Ce chapitre s'intéresse plus particulièrement à la longueur d'absorption, c'est-à-dire la longueur caractéristique donnant l'amortissement d'un faisceau par absorption.

Enfin, le chapitre 7 s'intéresse à la fluctuation du taux d'émission d'un émetteur de type molécule fluorescente en fonction de sa position au sein d'un milieu désordonné. La fonction de corrélation qui en découle porte des informations sur la structure microscopique du milieu (corrélations du désordre) ainsi que sur l'environnement local de la source. Ce résultat est intéressant dans le contexte de l'imagerie des milieux complexes.



# Chapitre 2

## Concepts fondamentaux de la propagation des ondes en milieux désordonnés

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Théorie de la diffusion multiple . . . . .</b>	<b>16</b>
2.2.1	Équation d'onde et fonction de Green . . . . .	16
2.2.2	Densité locale d'états (LDOS) . . . . .	18
2.2.3	Équation de Lippman-Schwinger . . . . .	19
2.2.4	Diffuseurs ponctuels . . . . .	20
2.2.5	Développement en essaim et speckle . . . . .	23
<b>2.3</b>	<b>Grandeurs moyennées . . . . .</b>	<b>24</b>
2.3.1	Développement en essaim et moyenne . . . . .	26
2.3.2	Description diagrammatique . . . . .	28
2.3.3	Champ moyen et équation de Dyson . . . . .	29
2.3.4	Intensité moyenne et équation de Bethe-Salpeter . . . . .	30
2.3.5	Équation de transfert radiatif en régime stationnaire . . . . .	31
2.3.6	Interprétation physique des termes de l'ETR en régime stationnaire . . . . .	33
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>36</b>

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les concepts fondamentaux de la propagation des ondes en milieux désordonnés utilisés dans ce manuscrit. Il peut donc être passé par les lecteurs déjà familiarisés avec ces concepts.

La première partie rappelle les concepts d'équation d'onde, de fonction de Green et de densité local d'états photoniques. Elle introduit aussi la notion de diffuseur ponctuel utilisée dans tout le manuscrit. Elle propose enfin une étude qualitative de la diffusion multiple pour une réalisation particulière du désordre et introduit ainsi le speckle.

La seconde partie s'intéresse aux grandeurs moyennées sur les réalisations du désordre comme le champ moyen ou l'intensité moyenne. L'approche diagrammatique est d'abord présentée. Les équations



tions de Dyson pour le champ moyen et de Bethe-Salpeter pour l'intensité moyenne sont ainsi rappelées et formulées sous forme de diagrammes. L'Équation de Transfert Radiatif est enfin introduite, d'abord à partir de son lien avec les équations de Dyson et de Bethe-Salpeter, puis à partir d'une approche plus intuitive à l'aide de considérations énergétiques.

## 2.2 Théorie de la diffusion multiple

### 2.2.1 Équation d'onde et fonction de Green

La fonction de Green est un outil mathématique très général permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires avec termes sources quelconques et conditions aux limites. Dans ce manuscrit, la fonction de Green est appliquée aux équations de Maxwell. Considérons un milieu désordonné modélisé par sa constante diélectrique  $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$  éclairé par une source décrite par sa densité de courant  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, \omega)$ . Le champ électrique dans le milieu est solution de l'équation de Helmholtz [15, 16]

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon(\mathbf{r}, \omega) k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_s(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.1)$$

où  $k_0 = \omega/c$  est le module du vecteur d'onde dans le vide. Par définition, la fonction de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  est solution de l'Eq. (2.1) avec comme terme source une distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.2)$$

Il existe deux solutions à l'Eq. (2.2). L'une correspondant à une onde rentrante venant de l'infini et une autre correspondant à une onde sortante vers l'infini. Dans la suite, la fonction de Green est prise avec une condition d'onde sortante à l'infini, cette solution est dite retardée. Le champ produit par la source  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, \omega)$  s'exprime alors en fonction de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \int \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}_s(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'. \quad (2.3)$$

Pour donner une image plus concrète de la fonction de Green, considérons le cas où la source est un dipôle électrique de moment  $\mathbf{p}_s$  positionné en  $\mathbf{r}'$ . La densité de courant associée est  $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mathbf{p}_s\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . L'Eq. (2.3) devient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0\omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{p}_s. \quad (2.4)$$

La fonction de Green donne le champ électrique produit en un point  $\mathbf{r}$  par un dipôle source positionné en un point  $\mathbf{r}'$ . Dans la suite du manuscrit, le milieu désordonné est modélisé par un ensemble de dipôles baignant dans le vide. La fonction de Green dans le vide est donc très utilisée car elle va permettre de déterminer le champ électrique dans tout l'espace quelle que soit la structure du milieu, en particulier par la méthode des dipôles couplés (voir chapitre 3).

Pour des ondes vectorielles en dimension trois, la fonction de Green est un tenseur. Dans le vide son expression est donnée par

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \text{VP} \left\{ \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{ik_0 r - 1}{k_0^2 r^2} \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - 3\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \right) \right] \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} \right\} + \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{3k_0^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}, \quad (2.5)$$

où VP désigne la valeur principale,  $\delta$  la distribution de Dirac et  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

Remarque : dans ce manuscrit, seul le chapitre 7 utilise les ondes vectorielles en dimension trois. Dans les chapitres 3 et 5, les ondes sont étudiées en dimension deux. Elle peut être vue comme un cas particulier de la dimension trois, lorsqu'un système est invariant par translation selon une direction. C'est le cas dans la plupart des chapitres où les milieux sont constitués de tiges de longueur grande devant la longueur d'onde. En notant  $\mathbf{u}_z$  la direction d'invariance et  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  les vecteurs définissant le plan perpendiculaire à  $\mathbf{u}_z$ , le tenseur de Green dans le vide est

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \begin{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) & 0 \\ 0 & G_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

où

$$\begin{cases} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{4} \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \right) H_0^{(1)}(k_0 R) + \frac{i}{4} \text{VP} \left\{ \left( 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \right) \frac{H_1^{(1)}(k_0 R)}{k_0 R} \right\} - \frac{\delta(R)}{2k_0^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \\ G_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 R) \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/R$  et  $H_i^{(1)}$  est la fonction de Hankel d'ordre  $i$  et de premier type. La forme de ce tenseur présente une propriété remarquable : pour un dipôle polarisé selon  $\mathbf{u}_x$  ou  $\mathbf{u}_y$  le champ rayonné est polarisé dans le plan  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  et pour un dipôle polarisé selon  $\mathbf{u}_z$  le champ rayonné est aussi polarisé selon  $\mathbf{u}_z$ . Ceci a des conséquences pour la propagation des ondes, car une onde polarisée selon  $\mathbf{u}_z$  va conserver sa polarisation en se propageant. De même une onde polarisée dans le plan  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  reste polarisée dans ce plan en se propageant. Il est donc possible d'étudier séparément les deux types de polarisation. Ces deux polarisations sont dénommées comme suit, la polarisation TM (transverse magnétique) est celle où le champ électrique est dans le plan  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$  et la polarisation TE (transverse électrique) est celle où le champ électrique est selon  $\mathbf{u}_z$ .

Il est à remarquer que dans le cas TE le champ électrique ne possède qu'une seule composante non nulle, dans ce cas les ondes peuvent être considérées comme scalaires et la fonction de Green est donnée par

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.8)$$

solution de

$$-\Delta G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.9)$$

Dans le chapitre 6, les ondes étudiées sont scalaires en dimension trois, la fonction de Green est alors

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik_0 R)}{4\pi R}, \quad (2.10)$$

où  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Dans ce cas la fonction de Green est solution de

$$-\Delta G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Densité locale d'états (LDOS)

LDOS est l'acronyme de *Local Density Of States*, signifiant Densité Locale d'États. La LDOS est une grandeur fondamentale en optique, elle est au cœur de l'interaction entre la lumière et la matière. En termes de fonction de Green sa définition est

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2\omega}{\pi c^2} \text{Im} \left[ \text{Tr} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \right] \right]. \quad (2.12)$$

Afin d'illustrer son importance, le cas de la puissance émise par un dipôle source classique  $\mathbf{p}$ , positionné en  $\mathbf{r}_s$  et plongé dans un milieu caractérisé par sa fonction de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  est considéré. Le champ est donc donné par

$$\mathbf{E} = \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{p}. \quad (2.13)$$

L'expression générale de la puissance émise est donnée par

$$P = -\frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{j}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  est la densité de courant, dans le cas d'un dipôle elle vaut  $-i\omega \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$ . La puissance émise est alors

$$P_{\mathbf{u}} = \frac{\omega}{2} \text{Im} [\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_s)], \quad (2.15)$$

avec  $\mathbf{u}$  tel que :  $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \mathbf{u}$ . En introduisant l'Eq. 2.13 dans cette dernière équation, il vient

$$P_{\mathbf{u}} = \frac{\mu_0 \omega^3}{2} |\mathbf{p}|^2 \text{Im} \left[ \mathbf{u} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{u} \right]. \quad (2.16)$$

En moyennant sur les orientations du dipôle la puissance émise est

$$P = \frac{\mu_0 \omega^3}{2} |\mathbf{p}|^2 \text{Im} \left[ \text{Tr} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, \omega) \right] \right]. \quad (2.17)$$

En utilisant la définition de la LDOS donnée par l'Eq. (2.12), le lien entre la puissance émise par un dipôle classique et la LDOS est établi :

$$P = \frac{\pi \mu_0 c^2 \omega^2}{4} |\mathbf{p}|^2 \rho(\mathbf{r}_s, \omega). \quad (2.18)$$

La puissance émise par un émetteur est donc proportionnelle à la LDOS. C'est un phénomène bien connu en électromagnétisme, la puissance d'émission d'une antenne dépend de son environnement. Ce raisonnement est aussi valable pour la puissance absorbée.

La LDOS se définit également à partir des modes propres électromagnétiques du système. Un mode propre  $\mathbf{e}_n(\mathbf{r})$  est solution de l'équation de propagation en régime stationnaire pour la fréquence propre  $\omega_n$  :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{e}_n - \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega_n^2}{c^2} \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.19)$$

Pour une cavité fermée et sans pertes, la fonction de Green peut se décomposer en fonction des modes du système [17, 18] :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_n c^2 \mathbf{e}_n^*(\mathbf{r}') \otimes \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \left[ \text{VP} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} + \frac{i\pi}{2\omega_n} \delta(\omega - \omega_n) \right]. \quad (2.20)$$

En combinant l'Eq. (2.12) et l'Eq. (2.20), la LDOS s'exprime ainsi de la manière suivante :

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n |\mathbf{e}_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\omega - \omega_n). \quad (2.21)$$

La LDOS en un point correspond donc à la densité d'états pondérée par les modes en ce point, c'est donc bien une quantité locale. La LDOS est utilisée dans le chapitre 3 pour la caractérisation spectrale de la localisation d'Anderson.

### Cas d'un émetteur quantique

Dans le cas d'un émetteur quantique, le taux d'émission spontanée  $\Gamma$  est également proportionnel à la LDOS [17]. Pour l'obtenir de manière phénoménologique on peut diviser la puissance émise par l'énergie portée par un photon  $\hbar\omega_{eg}$ , correspondant à la transition entre l'état excité et fondamental [17] :

$$\Gamma = \frac{\omega_{eg}^2}{\hbar\epsilon_0} |\mathbf{p}_{eg}|^2 \rho(\mathbf{r}, \omega_{eg}). \quad (2.22)$$

Cette dernière relation est très intéressante d'un point de vue expérimental [19], car la durée de vie  $\tau$  d'un émetteur fluorescent est inversement proportionnel à  $\Gamma$  :  $\tau = 1/\Gamma$ . De cette manière en mesurant la durée de vie d'un émetteur quantique il est possible de déterminer la LDOS à la position de l'émetteur.

### 2.2.3 Équation de Lippman-Schwinger

L'équation de Lippman-Schwinger est une équation portant sur le champ électrique, ici elle est établie en dimension trois pour des ondes vectorielles, mais elle se généralise simplement pour les autres dimensions et polarisations. Lorsqu'une onde éclaire un milieu désordonné, modélisé par sa constante diélectrique  $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$  ( $\omega$  étant la fréquence de la source), un élément de surface  $d^2\mathbf{r}$  (correspondant à un élément de volume en dimension deux) en  $\mathbf{r}$  acquière une polarisation  $d^2\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)$

$$d^3\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0[\epsilon(\mathbf{r}, \omega) - 1]\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)d^3\mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Chacun de ces éléments de surface rayonne ainsi une onde  $d^2\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{r}$  donnée par

$$d^3\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0\omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega), \quad (2.24)$$

Par principe de superposition, le champ électrique total est donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}, \omega) + \int_S d^3\mathbf{E}_s(\mathbf{r}', \omega), \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}, \omega)$  est le champ exciteur et  $S$  est la surface du milieu diffusant. L'équation de Lippman-Schwinger est alors donnée par

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \int_S [\epsilon(\mathbf{r}', \omega) - 1] \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}'} \quad (2.26)$$

Cette équation constitue l'une des équations de base de la théorie de la diffusion multiple. Il s'agit d'une équation fermée, qui peut être développée de manière itérative. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = & \mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \int_S [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) - 1] \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \\ & + \int_{S^2} [\epsilon(\mathbf{r}', \omega) - 1] \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) [\epsilon(\mathbf{r}'', \omega) - 1] \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}'', \omega) d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}''. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ce décomposition correspond à un développement en ordre de diffusion multiple. Le premier terme est la contribution de la source au champ en  $\mathbf{r}$  et le deuxième la contribution des ondes n'ayant été diffusée qu'une seule fois. Il est possible de développer indéfiniment le dernier terme pour trouver la contribution des ondes ayant été diffusées de deux à une infinité de fois [20, 21].

## 2.2.4 Diffuseurs ponctuels

### Polarisabilité

Dans l'ensemble des travaux présentés dans ce manuscrit, le milieu diffusant est modélisé par un ensemble de diffuseurs répartis de manière désordonnée dans l'espace. Ce choix est légitime d'un point de vue expérimental car les milieux désordonnés naturel, comme les nuages, la peinture ou les tissus biologiques, sont souvent bien représentés par des particules homogènes baignant dans un milieu hôte lui aussi homogène. Dans ce travail, ces diffuseurs sont considérés comme ponctuels, c'est-à-dire que leur taille caractéristique est très petite devant la longueur d'onde. Cette approximation peut paraître grossière, néanmoins elle permet de rendre les calculs numériques ou analytiques beaucoup plus simples et plus rapides. Ainsi, il est possible d'obtenir facilement des estimations des grandeurs d'intérêt, ce qui est particulièrement intéressant pour accompagner et aiguiller des réalisations expérimentales. Toutefois ce modèle pour les diffuseurs peut s'avérer exact, notamment pour la diffusion par des nuages atomiques. L'objectif de cette partie est de déterminer comment un diffuseur sphérique de volume  $V$  de constante diélectrique  $\epsilon(\omega)$  se polarise par l'application d'une onde électromagnétique monochromatique vectorielle en dimension trois.

La première étape consiste à appliquer l'Eq. (2.26) pour  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ ,  $\mathbf{r}_s$  désignant la position du diffuseur. Comme le diffuseur est de taille très petite par rapport à la longueur d'onde, le champ électrique dans le diffuseur peut être considéré comme homogène et l'Eq. (2.26) se réécrit :

$$\left[ \vec{\mathbf{I}} - k_0^2 [\epsilon(\omega) - 1] \int_V \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}_s, \omega) = E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega). \quad (2.28)$$

Pour  $V$  tendant vers 0, l'intégrale sur  $V$  de la fonction de Green est donnée par [22, 23]

$$\int_V \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' = -\frac{\vec{\mathbf{I}}}{3k_0^2} + \frac{ik_0}{6\pi} V \vec{\mathbf{I}}. \quad (2.29)$$

Ainsi le champ sur la particule est relié au champ excitateur par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_s, \omega) = \frac{E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)}{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{3} \left( 1 - \frac{ik_0^3 V}{2\pi} \right)}. \quad (2.30)$$

Le moment dipolaire  $\mathbf{p}$  de la particule est donné par

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 [\epsilon(\omega) - 1] V \mathbf{E}(\mathbf{r}_s, \omega), \quad (2.31)$$

et en injectant l'Eq. (2.30), le moment dipolaire du diffuseur s'exprime en fonction du champ excitateur :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega), \quad (2.32)$$

où  $\alpha(\omega)$  est par définition la polarisabilité du diffuseur. Elle est donnée par [24]

$$\boxed{\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 - \frac{ik_0^3}{6\pi} \alpha_0(\omega)}}, \quad (2.33)$$

où  $\alpha_0(\omega)$  est la polarisabilité statique donnée par

$$\alpha_0(\omega) = 3V \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2}. \quad (2.34)$$

La dépendance fréquentielle de  $\alpha(\omega)$  est déterminée avec le modèle de l'électron élastiquement lié pour  $\epsilon(\omega)$  :

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_R^2 + i\gamma\omega}, \quad (2.35)$$

$\omega_p$  est la fréquence plasma,  $\omega_R$  la fréquence de résonance et  $\gamma$  rend compte des pertes par absorption dans le matériau diélectrique. En injectant l'Eq. (2.35) dans l'Eq. (2.33), il vient

$$\alpha(\omega) = \frac{-V\omega_p}{\omega^2 - \omega_R^2 - \omega_p^2/3 + i(\gamma\omega + k_0^3 V \omega_p^2/6\pi)}. \quad (2.36)$$

En posant  $\omega_0^2 = \omega_R^2 + \omega_p^2/3$ ,  $\Gamma_R = V\omega_p^2\omega_0^2/6\pi c^3$  et  $\Gamma_{NR} = \gamma\omega_0^2/\omega^2$ , la polarisabilité se réécrit alors sous la forme

$$\alpha(\omega) = -\frac{6\pi\Gamma_R c^3}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i(\Gamma_R + \Gamma_{NR})\omega^3/\omega_0^2}. \quad (2.37)$$

Dans cette expression,  $\Gamma_R$  décrit les pertes par rayonnement et  $\Gamma_{NR}$  décrit les pertes par absorption.

Remarque : la polarisabilité en dimension trois pour des ondes scalaires est donnée par

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 - i\frac{k_0^3}{4\pi}\alpha_0(\omega)}, \quad (2.38)$$

où  $\alpha_0(\omega) = V[\epsilon(\omega) - 1]$  et  $V$  est le volume du diffuseur. En utilisant le modèle de l'électron élastiquement lié, la forme générale de la polarisabilité est retrouvée

$$\alpha(\omega) = -\frac{4\pi c^3 \Gamma_R}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i(\Gamma_R + \Gamma_{NR})\omega^3/\omega_0^2}. \quad (2.39)$$

En dimension deux pour des ondes polarisées TE, la polarisabilité est donnée par

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 - \frac{ik_0^2}{4}\alpha_0(\omega)}, \quad (2.40)$$

où  $\alpha_0(\omega) = S[\epsilon(\omega) - 1]$  et  $S$  est la surface d'un diffuseur. En utilisant le modèle de l'électron élastiquement lié, la forme générale de la polarisabilité est retrouvée

$$\alpha(\omega) = -\frac{4\Gamma_R c^2}{\omega_0} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i(\Gamma_R + \Gamma_{NR})\omega^2/\omega_0}. \quad (2.41)$$

Ces expressions s'obtiennent de la même manière qu'en dimensions trois pour des ondes vectorielles.

### Section efficace d'extinction

La section efficace d'extinction d'un diffuseur ponctuel correspond à la puissance moyenne totale cédée par le champ exciteur au diffuseur. Cette puissance  $P_{\text{ext}}$  se calcule comme

$$P_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \text{Re}[-i\omega \mathbf{p} \cdot E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)^*]. \quad (2.42)$$

$\mathbf{p}$  désigne le moment dipolaire d'un diffuseur  $\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)$  et  $\mathbf{r}_s$  sa position. Ainsi

$$P_{\text{ext}} = k_0 \text{Im}[\alpha(\omega)] \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)|^2. \quad (2.43)$$

La section efficace d'extinction  $\sigma_{\text{ext}}$  est définie comme le rapport entre le flux de puissance incidente et  $P_{\text{ext}}$ . En dimension deux et en polarisation TE,  $\sigma_{\text{ext}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{ext}} = k_0 \Im[\alpha(\omega)]. \quad (2.44)$$

En utilisant l'expression de l'Eq. (2.37) pour  $\alpha(\omega)$  l'expression de  $\sigma_{\text{ext}}$  devient :

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{6\pi c^2 \omega^4 \Gamma_R (\Gamma_R + \Gamma_{NR})}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.45)$$

Remarque : en dimension trois pour des ondes scalaires,  $\sigma_{\text{ext}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R (\Gamma_R + \Gamma_{NR})}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.46)$$

En dimension deux pour des ondes polarisées TE,  $\sigma_{\text{ext}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{k_0^3 c^4 \Gamma_R (\Gamma_R + \Gamma_{NR})}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^4}. \quad (2.47)$$

### Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion d'un diffuseur ponctuel correspond à la puissance moyenne émise en champ lointain par rayonnement  $P_{\text{sca}}$  par le diffuseur dans le vide. En dimension trois et pour des ondes vectorielles, la puissance rayonnée par un dipôle oscillant  $\mathbf{p}$  placé en  $\mathbf{r}_s$  est donnée par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} |\mathbf{p}|^2. \quad (2.48)$$

Dans le cas d'un diffuseur ponctuel on a  $\mathbf{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)$ . La puissance rayonnée moyenne  $P_{\text{sca}}$  est alors

$$P_{\text{sca}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \frac{k_0^4}{6\pi} |\alpha(\omega)|^2 |E^{\text{exc}}(\mathbf{r}_s, \omega)|^2 \quad (2.49)$$

La section efficace de diffusion  $\sigma_{\text{sca}}$  est définie comme le rapport entre le flux de puissance incidente et  $P_{\text{sca}}$ . En dimension trois et pour des ondes vectorielles,  $\sigma_{\text{sca}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{k_0^4}{6\pi} |\alpha(\omega)|^2. \quad (2.50)$$

En utilisant l'expression de l'Eq. (2.37) pour  $\alpha(\omega)$  l'expression de  $\sigma_{\text{sca}}$  devient :

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{6\pi c^2 \omega^4 \Gamma_R^2}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.51)$$

Remarque : en dimension trois pour des ondes scalaires,  $\sigma_{\text{sca}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R^2}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.52)$$

En dimension deux pour des ondes polarisées TE,  $\sigma_{\text{sca}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{k_0^3 c^4 \Gamma_R^2}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^4}. \quad (2.53)$$

### Conservation de l'énergie et section efficace d'absorption

Dans le cas où le diffuseur est non absorbant ( $\Gamma_{NR} = 0$ ) les sections efficaces  $\sigma_{\text{ext}}$  et  $\sigma_{\text{sca}}$  sont égales, ce qui signifie que toute la puissance prélevée au champ incident est diffusée. Cette égalité entre  $\sigma_{\text{ext}}$  et  $\sigma_{\text{sca}}$  correspond à la conservation de l'énergie :

$$k_0 \text{Im}[\alpha(\omega)] = \frac{k_0^4}{6\pi} |\alpha(\omega)|^2. \quad (2.54)$$

Dans le cas où le diffuseur est absorbant il est possible de définir, de la même manière que les autres sections efficaces, une section efficace d'absorption  $\sigma_{\text{abs}}$  donnée par la différence entre  $\sigma_{\text{ext}}$  et  $\sigma_{\text{sca}}$  :

$$\sigma_{\text{abs}} = k_0 \left( \text{Im}[\alpha(\omega)] - \frac{k_0^4}{6\pi} |\alpha(\omega)|^2 \right) \quad (2.55)$$

En utilisant l'expression de l'Eq. (2.37) pour  $\alpha(\omega)$  l'expression de  $\sigma_{\text{abs}}$  devient :

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{6\pi c^2 \omega^4 \Gamma_R \Gamma_{NR}}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.56)$$

Il est important de remarquer que toutes les sections efficaces sont modifiées en introduisant de l'absorption via leur dépendance en  $\Gamma_{NR}$ .

Remarque : en dimension trois pour des ondes scalaires,  $\sigma_{\text{abs}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R \Gamma_{NR}}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (2.57)$$

En dimension deux pour des ondes polarisées TE,  $\sigma_{\text{abs}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{k_0^3 c^4 \Gamma_R \Gamma_{NR}}{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^4}. \quad (2.58)$$

### 2.2.5 Développement en essaim et speckle

Cette partie propose une description de la diffusion multiple à travers un développement en essaim pour un milieu formé de particules diffusantes (désordre discret). Le désordre est constitué de  $N$



diffuseurs ponctuels de polarisabilité  $\alpha(\omega)$ . Lorsqu'un de ces diffuseurs, placé en  $\mathbf{r}'$ , est soumis à un champ excitateur  $\mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}', \omega)$  il rayonne un champ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}^{\text{exc}}(\mathbf{r}', \omega). \quad (2.59)$$

Lorsque qu'un dipôle source  $\mathbf{p}$ , placé en  $\mathbf{r}_0$ , rayonne, le champ total est la somme de celui produit par la source avec celui produit par les diffuseurs. En considérant que l'onde partant de  $\mathbf{r}_0$  n'est diffusée qu'au plus une seule fois avant d'atteindre  $\mathbf{r}$  (approximation de la diffusion simple), le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  est donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p} + \sum_{j=1}^N k_0^2 \alpha(\omega) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \omega) \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}. \quad (2.60)$$

Comme les positions des différents diffuseurs sont aléatoires, les interférences en  $\mathbf{r}$  entre les ondes diffusées et la source peuvent être constructives ou destructives. La figure d'interférences résultante, par exemple dans un plan en sortie du système, présente donc une structure complexe et difficile à déterminer *a priori*. Cette figure est appelée figure de speckle (ou tavelure en français).

Le même calcul peut-être effectué en incluant les ondes diffusées par au plus deux diffuseurs (approximation de la diffusion double). Le champ est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \mu_0 \omega^2 \mathbf{p} + \sum_{j=1}^N \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \omega) \alpha(\omega) k_0^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0, \omega) \mu_0 \omega^2 \mathbf{p} \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}} \alpha(\omega)^2 k_0^4 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \omega) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \omega) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_0, \omega) \mu_0 \omega^2 \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

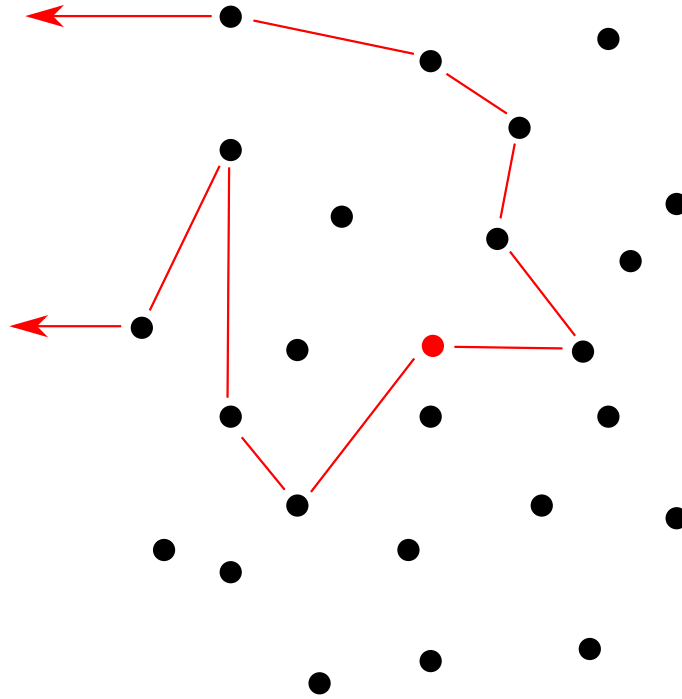
Il est alors encore plus difficile de prédire la figure d'interférences résultante. Il est bien sûr possible d'imaginer des processus de diffusion avec plus de deux diffuseurs et même une infinité. Le champ total est une somme de tous les processus de diffusion possibles, les termes de cette somme sont des chemins de diffusion. Cette décomposition du champ constitue le développement en essaim [25–27]. La Fig. 2.1 représente quelques exemples de chemins possibles pour une onde dans un milieu désordonné.

Cette décomposition donne toujours lieu à une figure d'interférences, d'autant plus complexe que non seulement les positions des diffuseurs sont aléatoires mais en plus les ondes y contribuant sont nombreuses et ont suivies des chemins et processus de diffusion très différents. La Fig. 2.2 présente un exemple de figure de speckle enregistrée en transmission sur un échantillon de billes de silice désordonnées.

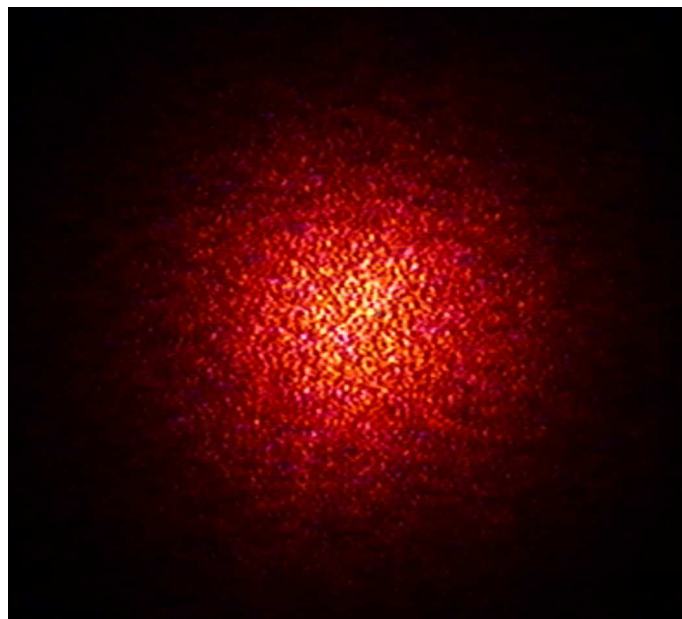
Historiquement la première figure de speckle produite avec un laser a été observée en 1963 par R. V. Langmuir [28]. Aussi compliquée qu'elle puisse paraître cette figure de speckle n'est pas aléatoire. En chaque point de l'espace, la phase, l'amplitude, la polarisation sont parfaitement déterminées car la propagation des ondes dans le milieu est déterministe. Il est même possible, en manipulant le front de l'onde incidente, de produire une figure de speckle arbitraire [3].

## 2.3 Grandeurs moyennées

L'étude particulière d'une réalisation du désordre n'est pas pertinente pour déterminer certaines observables pratiques. L'étude des grandeurs moyennées (la moyenne portant sur l'ensemble des configurations du désordre), comme le champ moyen ou l'intensité moyenne, est beaucoup plus appropriée. En effet, dans de nombreux cas seules des mesures de quantités moyennes sont possibles.



**Figure 2.1** – Les diffuseurs sont représentés par des disques noirs et la source par un disque rouge. Les flèches rouges représentent deux chemins possibles et deux termes du développement en essaim



**Figure 2.2** – Exemple de figure de speckle transmis par un échantillon de  $70\ \mu\text{m}$ , composé de billes de silice de  $400\ \text{nm}$  de diamètre, éclairé par un laser He-Ne (mesure réalisée par E. Perros).

Dans la vie courante cela est également justifié, car l'œil ne peut pas percevoir les variations instantanées de la lumière, seul les grandeurs moyennées lui sont accessibles. Cette partie a pour but d'introduire les outils permettant cette étude. Aussi, pour rendre les calculs plus simples et faciliter la compréhension, ces outils sont introduits pour des ondes scalaires en dimension trois.

### 2.3.1 Développement en essaim et moyenne

L'approche diagrammatique va permettre de rendre compte de manière très simple de la diffusion multiple sur les grandeurs moyennes. Réécrivons le développement en essaim de l'Eq. (2.60), correspondant à la diffusion simple, pour des ondes scalaires en dimension trois. Dans cette géométrie la polarisation  $p$  du dipôle source est une grandeur scalaire, afin de simplifier les écriture  $p$  est prise telle que  $\mu_0\omega^2 p = 1$ . En moyenne le champ est donné par

$$\langle E(\mathbf{r}, \omega) \rangle = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) + \sum_{j=1}^N \alpha k^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \omega) G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0, \omega) P(\mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}_j, \quad (2.62)$$

où  $P(\mathbf{r}_j)$  est la distribution de probabilité de trouver le diffuseur  $j$  en  $\mathbf{r}_j$ . En général  $P(\mathbf{r}_j) = 1/V$ ,  $V$  étant le volume du système, est légitime pour des milieux statistiquement homogènes. Dans cette dernière équation la somme porte sur  $N$  fois la même intégrale, elle peut donc être réécrite, en notant  $\rho = N/V$  la densité, comme

$$\langle E(\mathbf{r}, \omega) \rangle = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) + \rho \alpha k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \omega) d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.63)$$

Comme la source est un dipôle ponctuel,  $\langle E(\mathbf{r}) \rangle$  est la fonction de Green moyenne du système. En diffusion double le champ moyen se calcule de la même manière en réécrivant l'Eq. (2.61) pour des ondes scalaires en dimension trois,

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{r}) \rangle = & G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \rho \alpha k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \omega) d^3 \mathbf{r}' \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}} \int \alpha^2 k_0^4 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) G_0(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_0) P(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l) d^3 \mathbf{r}_j d^3 \mathbf{r}_l, \end{aligned} \quad (2.64)$$

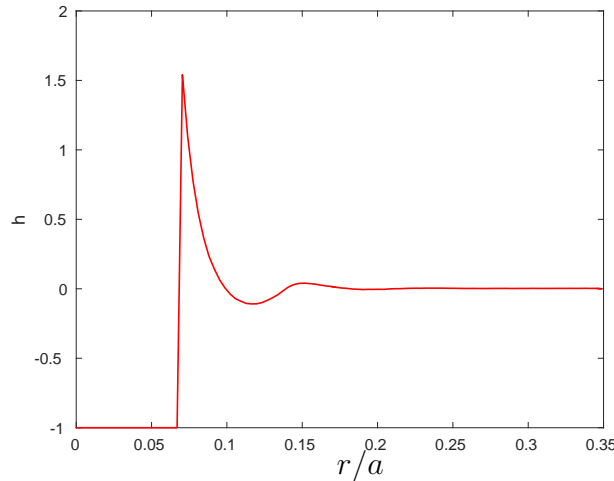
$P(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l)$  est la distribution de probabilité de trouver un diffuseur en  $\mathbf{r}_j$  et un autre en  $\mathbf{r}_l$ . Cette distribution s'exprime à l'aide de la fonction de corrélation de paire. Lorsque des particules sont en interaction, elles ne se positionnent pas de manière indépendante, c'est-à-dire que la probabilité  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  n'est pas  $P(\mathbf{r})P(\mathbf{r}')$ . La fonction de corrélation de paire  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  mesure cet écart à l'indépendance de  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et est définie de la manière suivante :

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(\mathbf{r})P(\mathbf{r}')[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \quad (2.65)$$

$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  résultant d'un potentiel modélisant les interactions entre les particules. Pour un système invariant par translation et isotrope on a  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = h(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ . Le potentiel le plus simple pour modéliser des particules en interaction est le potentiel de sphères dures. Deux particules interagissant selon ce potentiel ne peuvent pas s'approcher à moins d'une certaine distance  $a$ . Le potentiel de sphères dures  $v(r)$  est défini comme

$$v(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.66)$$

Chaque particule occupe alors un volume  $v_p = 4\pi/3(a/2)^3$ , qu'aucune autre particule ne peut pénétrer. Il est possible de définir la fraction volumique  $f$  comme le rapport entre le volume occupé par les particules sur le volume total,  $f = \rho v_p$ . Un exemple de fonction de corrélation de paire correspondante est donnée sur la Fig. 2.3.  $h(r)$  vaut  $-1$  pour  $0 < r < a$ , oscille autour de zéro pour  $r$  proche de  $a$  par valeurs supérieures, caractéristique d'un ordre local dans le système [29] et tend vers zéro pour  $r \gg a$  les particules se positionnant alors de manière indépendante. Cependant pour  $f \ll 1$  il est possible de retenir en première approximation  $h(r) = 0$  pour  $r > a$ .

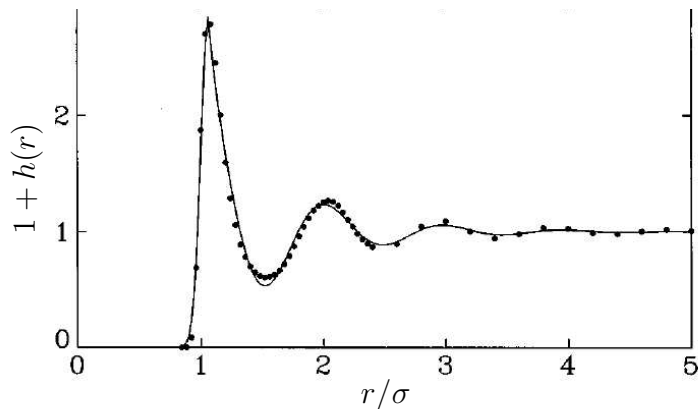


**Figure 2.3** – Fonction de corrélation de paire pour des particules interagissant selon un potentiel de sphères dures pour une fraction volumique  $f = 0.35$  en dimension trois. Il est impossible de trouver deux particules à une distance  $r < a$  l'une de l'autre. Pour des distances  $r > a$  proches de  $a$ ,  $h(r)$  oscille autour de zéro, caractéristique d'un ordre local dans le système [29] et pour les grandes distances  $r \gg a$ ,  $h(r)$  tend vers zéro, à grandes distances les particules se positionnant de manière indépendante.

Un autre exemple est présenté sur la Fig.2.4. Il s'agit de la fonction de corrélation de paire donnée pour des particules interagissant selon le potentiel de Lennard-Jones :

$$v(r) = A \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad (2.67)$$

$r$  est la distance entre les particules,  $\sigma$  est la distance caractéristique du potentiel et  $A$  une constante avec la dimension d'une énergie. Dans le potentiel de Lennard-Jones le terme en  $r^{-12}$  résulte des interactions répulsives provenant du principe de Pauli et le terme en  $r^{-6}$  des interactions attractives de van der Waals. Pour  $r$  proche de  $\sigma$  les forces associées à chacun des deux termes se compensent. Ce potentiel est souvent utilisé, il est plus réaliste que le potentiel de sphères dures.



**Figure 2.4** – Fonction de corrélation de paire pour des particules interagissant selon le potentiel de Lennard-Jones. Les ronds noirs désignent les résultats numérique et la ligne continue correspond à une approximation analytique [30].  $\sigma$  est la longueur caractéristique associée au potentiel de Lennard-Jones.

À l'aide de la fonction de corrélation de paire, le champ moyen devient alors

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{r}) \rangle = & G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \rho \alpha k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \omega) d^3 \mathbf{r}' \\ & + \rho^2 \alpha^2 k_0^4 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) [1 + h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Il est bien évidemment possible d'écrire le cas de la diffusion triple, etc... Néanmoins l'écriture avec des intégrales n'est pas évidente à manipuler, d'où l'intérêt de l'approche diagrammatique [31].

### 2.3.2 Description diagrammatique

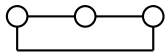
Le formalisme présenté ici est adapté des diagrammes de Feynman [31]. Les diagrammes pour la diffusion simple se représentent de la manière suivante :

$$\langle G \rangle = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad (2.69)$$

une ligne simple représentant  $G_0$  et un disque représentant un diffuseur. La représentation de la diffusion double est

$$\langle G \rangle = \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \overset{\text{---}}{\bigcirc} \text{---}, \quad (2.70)$$

où l'arc de cercle pointillé indique que les deux diffuseurs sont corrélés par la fonction de corrélation de paire  $h$ . En considérant la diffusion triple, l'onde peut aller à un diffuseur puis à un autre et revenir au diffuseur précédent. Cet effet s'appelle la diffusion récurrente, un exemple est schématisé par le diagramme suivant :

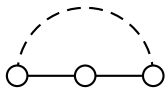


Les deux diffuseurs reliés par la ligne brisée sont identiques. Il est possible d'imaginer d'autres diagrammes avec seulement deux diffuseurs car l'onde peut effectuer une infinité d'allers-retours entre ces deux diffuseurs.

Certains diagrammes sont dits factorisables, c'est-à-dire qu'ils s'écrivent comme le produit d'au-moins deux autres diagrammes, par exemple le diagramme suivant est factorisable :

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \overset{\text{---}}{\bigcirc} \text{---} = \text{---} \bigcirc \text{---} \overset{\text{---}}{\bigcirc} \text{---} \times \text{---} \bigcirc \text{---}$$

mais celui-ci ne l'est pas :



Cette distinction est importante pour la suite, surtout pour écrire les équations de Dyson et de Bethe-Salpeter.

### 2.3.3 Champ moyen et équation de Dyson

L'équation de Dyson est une équation portant sur la fonction de Green moyenne du système [25, 26]. La fonction de Green moyenne donne le champ moyen dans le milieu pour un dipôle source. Dans le cas où on n'effectue pas d'approximation sur l'ordre de la diffusion, le champ moyen correspond à la somme de tous les processus de diffusion possibles ou chemins, il y en a évidemment un très grand nombre rendant le problème très complexe. L'écriture diagrammatique va permettre de rendre compte de cette complexité sous une forme très condensée en introduisant la *self-energy*  $\Sigma$ . La *self-energy*  $\Sigma$  est la somme de tous les diagrammes non factorisables :

$$\Sigma = \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \dots \quad (2.71)$$

En notant  $\Sigma$  sous la forme  $\bullet$  et  $\langle G \rangle$  sous la forme  $\text{—}$ , l'équation de Dyson qui donne la fonction de Green moyenne s'écrit

$$\boxed{\text{—} = \text{—} + \text{—} \bullet \text{—}}. \quad (2.72)$$

Cette équation est fermée, il est possible de la développer en injectant dans le membre de droite l'expression de la fonction de Green moyenne exprimée avec la self-energy :

$$\text{—} = \text{—} + \text{—} \bullet \text{—} + \text{—} \bullet \bullet \text{—}. \quad (2.73)$$

En poursuivant ce développement tous les processus de propagation du champ sont retrouvés. C'est pourquoi les diagrammes dans la *self-energy* doivent absolument être non factorisables, sinon des diagrammes factorisables apparaîtraient deux fois en développant la fonction de Green moyenne. La forme littérale de l'équation de Dyson en dimension trois est la suivante :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \rangle = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \Sigma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \omega) \rangle d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \quad (2.74)$$

Le calcul de la fonction de Green moyenne permet d'introduire la notion de milieu effectif. La transformée de Fourier de l'Eq. (2.74) permet de déterminer  $\langle G \rangle$  (cas scalaire) :

$$\langle G \rangle(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2 - \Sigma(\mathbf{k})}, \quad (2.75)$$

pour un milieu dilué ( $k_0 \ell_B \gg 1$ ,  $\ell_B$  étant le libre parcours moyen de Boltzmann introduit dans la partie 2.3.5),  $\Sigma(\mathbf{k}) \ll k_0^2$  et  $\langle G \rangle(\mathbf{k})$  devient très piquée autour de  $k_0$ . L'approximation *on-shell* est alors légitime :  $\Sigma(\mathbf{k}) \sim \Sigma(k_0)$ . Dans ce cas  $\langle G \rangle$  devient

$$\langle G \rangle(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_{\text{eff}}^2}, \quad (2.76)$$

où  $k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + \Sigma(k_0)$ . Cette expression de la fonction de Green moyenne s'identifie avec celle d'un milieu homogène d'indice effectif  $n_{\text{eff}}$  donné par

$$n_{\text{eff}} = \sqrt{1 + \frac{\Sigma(k_0)}{k_0^2}}. \quad (2.77)$$

L'indice effectif est un nombre complexe. La partie imaginaire va déterminer la longueur caractéristique d'amortissement du champ moyen dans le milieu, appelée longueur d'extinction  $\ell_{\text{ext}}$ . Physiquement cette longueur indique sur quelle distance caractéristique un faisceau cède son énergie au milieu.

Le calcul exact de  $\Sigma$  est très difficile, elle est souvent approximée en milieu dilué par son premier ou ses deux premiers termes. À l'ordre le plus bas en  $(k_0 \ell_B)^{-1}$ , l'approximation de Foldy-Twersky [32] donne

$$\bullet \sim \circ. \quad (2.78)$$

La longueur d'extinction est alors  $\ell_{\text{ext}} = 1/\rho\sigma_{\text{ext}}$ . Cette approximation est aussi appelée Approximation de la Diffusion Indépendante (*Independent Scattering Approximation* en anglais). Une autre approximation possible est celle de Keller ou de Bouret, elle donne

$$\bullet \sim \circ + \text{diagramme à deux cercles reliés par une ligne horizontale et une arc au-dessus}. \quad (2.79)$$

### 2.3.4 Intensité moyenne et équation de Bethe-Salpeter

L'équation de Bethe-Salpeter est une équation portant sur la corrélation spatiale du champ à une fréquence donnée [31, 33, 34]. Elle s'établit de manière similaire à l'équation de Dyson. Comme pour l'équation de Dyson le champ se décompose en une somme sur tous les chemins possibles pour l'onde, sauf que la moyenne porte sur le module de cette somme. La somme ainsi obtenue est particulièrement difficile à appréhender, l'équation de Bethe-Salpeter en propose une forme condensée. De la même manière que pour l'équation de Dyson, un opérateur correspondant à la somme de tous les diagrammes non factorisables est introduit. Il s'agit du vertex intensité  $\Gamma$ , son symbole diagrammatique est

$$\Gamma = \text{diagramme rectangle hachuré}. \quad (2.80)$$

Les premiers termes du développement de  $\Gamma$  sont

$$\text{diagramme rectangle hachuré} = \text{diagramme à deux cercles reliés par une ligne verticale} + \text{diagramme à deux cercles reliés par une ligne horizontale} + \text{diagramme à deux cercles reliés par une ligne diagonale} + \dots \quad (2.81)$$

Remarque : les termes du vertex intensité se calculent sous la forme d'intégrales, par exemple :

$$\begin{aligned} \text{diagramme à deux cercles reliés par une ligne horizontale et une arc au-dessus} &= \rho^2 \int \alpha(\omega) k_0^2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'', \omega) \alpha(\omega) k_0^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j) \\ &\quad \times \alpha^*(\omega) k_0^2 \delta(\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_i) h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}_i d^3 \mathbf{r}_j d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'', \end{aligned} \quad (2.82)$$

où  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  désignent les positions des deux diffuseurs.

L'équation de Bethe-Salpeter s'écrit alors sous la forme

$$\langle GG^* \rangle = \text{---} + \text{---} \boxed{\text{diagonal lines}} \langle GG^* \rangle. \quad (2.83)$$

De même que pour l'équation de Dyson, en développant l'équation de Bethe-Salpeter toutes les contributions à l'intensité moyenne sont retrouvées : diffusion simple, double, etc... Il est à remarquer que dans l'Eq. (2.83), c'est le produit des fonctions de Green moyennées qui apparait et non le produit des fonctions de Green du vide, car sinon en éclatant cette équation tous les processus de diffusion contribuant à l'intensité moyenne ne seraient pas retrouvés.

Cette équation peut aussi s'écrire pour le champ électrique en dimension trois pour des ondes scalaires :

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{r})E^*(\mathbf{r}') \rangle &= \langle E(\mathbf{r}) \rangle \langle E^*(\mathbf{r}') \rangle \\ &+ \int \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}', \mathbf{s}_1, \omega) \rangle \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \langle E(\mathbf{r}_2)E^*(\mathbf{s}_2) \rangle d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{s}_1 d^3\mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Comme pour la *self-energy*, le vertex intensité est très difficile à calculer de manière exacte. Dans le cadre de la diffusion indépendante, il peut être approximé, à l'ordre le plus bas en  $(k_0\ell_B)^{-1}$ , par

$$\boxed{\text{diagonal lines}} \sim \text{---} \bigcirc \text{---}. \quad (2.85)$$

Dans ce cas l'équation de Bethe-Salpeter est grandement simplifiée :

$$\langle GG^* \rangle \sim \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \dots \quad (2.86)$$

Cette approximation est aussi appelée approximation de l'échelle (ou *ladder* en anglais), et revient à considérer que les chemins de diffusion sont indépendants les uns des autres, les champs  $E$  et  $E^*$  suivant le même chemin sont les seuls à contribuer à la valeur moyenne.

### 2.3.5 Équation de transfert radiatif en régime stationnaire

L'équation de Bethe-Salpeter est trop complexe pour être résolue de manière exacte. L'équation de transfert radiatif (ETR) en constitue une première approximation [35]. Elle a initialement été introduite en astrophysique pour décrire la propagation de rayonnement dans les milieux interstellaires [35], puis en neutronique pour décrire la propagation des neutrons dans les réacteurs nucléaires [36]. L'ETR est valide dans l'approximation des milieux dilués ( $k_0\ell_B \gg 1$ ,  $\ell_B$  étant défini à la fin de cette section) et porte sur la luminance, un flux radiatif local et directionnel. Dans cette section, la luminance et l'ETR sont présentées de manière formelle, en trois dimensions pour des ondes scalaires à partir de l'équation de Bethe-Salpeter. La section suivante propose une approche plus intuitive fondée sur un bilan d'énergie.

Une définition intuitive et une interprétation physique de la luminance sont proposées dans la section 2.3.6. De manière formelle, la luminance  $L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega)$ ,  $\mathbf{r}$  désignant la position et  $\mathbf{u}$  la direction du



flux, est définie à partir de la transformée de Wigner du champ électrique, sa transformée de Fourier est donnée par

$$\langle E(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega) E^*(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega) \rangle = \delta(k^2 - k_r^2) L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \omega), \quad (2.87)$$

où  $k_r = \sqrt{\text{Re}[k_{\text{eff}}^2]}$ ,  $k_{\text{eff}}$  étant défini à l'Eq. (2.76) et  $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$ . Cette définition est donnée à un facteur multiplicatif près pour avoir la bonne dimension. Dans cette définition  $\mathbf{k}$  rend compte des variations rapides de l'intensité (direction) et  $\mathbf{q}$  des variations lentes (rapide). En dimension trois pour des ondes scalaires, la luminance est alors

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) = \frac{1}{8\pi^3} \int L(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \omega) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q}. \quad (2.88)$$

L'ETR est alors retrouvée en injectant l'Eq. (2.87) dans l'équation de Bethe-Salpeter et avec les conditions  $k_0 \ell_B \gg 1$  et  $q \ll k$  :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) = -\mu_{\text{ext}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) + \frac{\mu_{\text{sca}}}{4\pi} \int p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \omega) d\Omega', \quad (2.89)$$

où  $\mu_{\text{ext}} = \text{Im}[\Sigma(k_0)]/k_r$ ,  $p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$  est la fonction de phase et  $\mu_{\text{sca}}$  le coefficient de diffusion. Ces deux grandeurs s'expriment à partir du vertex intensité  $\Gamma$  de l'équation de Bethe-Salpeter, corrigé grâce à l'hypothèse d'invariance statistique du système par translation. Ce qui permet de définir  $\tilde{\Gamma}$  par

$$\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{q} + \mathbf{q}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}'). \quad (2.90)$$

$\mu_{\text{sca}}$  est donné en trois dimensions par

$$\mu_{\text{sca}} = \frac{1}{16\pi^2} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}) d\Omega, \quad (2.91)$$

et  $p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$  est définie comme

$$p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{\tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u})}{4\pi \mu_{\text{sca}}}. \quad (2.92)$$

La fonction de phase est en particulier utilisée dans le chapitre 5 pour étudier la propagation d'ondes en milieu désordonnés corrélés.  $\mu_{\text{ext}}$  permet de définir la longueur d'extinction  $\ell_{\text{ext}} = 1/\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  libre parcours moyen de diffusion  $\ell_{\text{sca}} = 1/\mu_{\text{sca}}$ . Pour des dipôles, dans l'approximation de Foldy-Twersky  $\mu_{\text{ext}}$  se calcule comme

$$\mu_{\text{ext}} = \rho k_0 \Im[\alpha(\omega)] = \rho \sigma_{\text{ext}}. \quad (2.93)$$

La longueur d'extinction est alors

$$\ell_{\text{ext}} = \frac{1}{\rho \sigma_{\text{ext}}}. \quad (2.94)$$

Dans l'approximation de l'échelle,  $\mu_{\text{sca}}$  se calcule facilement (en dimension trois pour des ondes scalaires) :

$$\mu_{\text{sca}} = \rho \frac{k_0^4 |\alpha(\omega)|^2}{4\pi} = \rho \sigma_{\text{sca}}, \quad (2.95)$$

Ce qui permet de définir le libre parcours moyen de Boltzmann  $\ell_B = 1/\rho \sigma_{\text{sca}}$ .

### ETR en dimension deux

Il est intéressant de préciser le cas de la dimension deux, car cette dimension est utilisée dans le chapitre 5 pour étudier la propagation des ondes dans les milieux désordonnés corrélés. Pour des ondes scalaires en dimension deux l'ETR s'écrit

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) = -\mu_{\text{ext}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) + \frac{\mu_{\text{sca}}}{2\pi} \int p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L(r, \mathbf{u}', \omega) d\Omega'. \quad (2.96)$$

Dans cette dimension les coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  et de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  sont donnés par

$$\mu_{\text{ext}} = \frac{\text{Im} [\Sigma(k_0)]}{k_r}, \quad \mu_{\text{sca}} = \frac{1}{8\pi k_r} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}) d\Omega. \quad (2.97)$$

La fonction de phase est alors donnée par

$$p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{\tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u})}{4k_r \mu_{\text{sca}}}. \quad (2.98)$$

En particulier dans l'approximation de l'échelle  $\mu_{\text{sca}}$  est donné par

$$\mu_{\text{sca}} = \rho \frac{k_0^3 |\alpha(\omega)|^2}{4} = \rho \sigma_{\text{sca}}. \quad (2.99)$$

### Identité de Ward

Pour les milieux non absorbants, les coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  et de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  sont égaux, ce qui permet d'établir un lien entre les opérateurs  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$ , s'écrivant en dimension trois pour des ondes scalaires

$$\frac{\text{Im} [\Sigma(k_0)]}{k_r} = \frac{1}{16\pi^2} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (2.100)$$

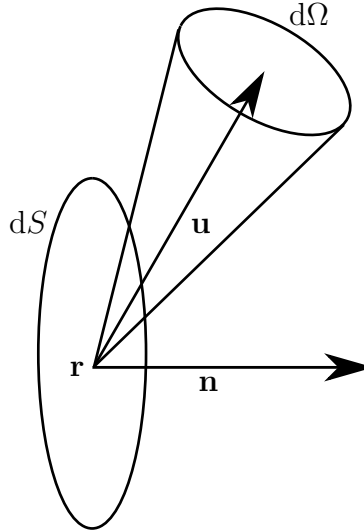
Cette dernière équation est l'identité de Ward [37] et traduit la conservation de l'énergie dans les système non absorbants.

Cette identité peut être vue comme une généralisation du théorème optique en diffusion multiple et en présence de corrélations. Elle permet de calculer de manière cohérente les coefficients d'extinction et de diffusion en prenant en compte des diagrammes avec plusieurs événements de diffusion [38].

Aussi cette identité permet de calculer un coefficient d'absorption en présence de corrélations du désordre ou de diffusion récurrente, incluant deux diffuseurs différents. Le chapitre 6 utilise ce résultat pour étudier comment l'absorption d'un milieu désordonné dépend des corrélations du désordre.

### 2.3.6 Interprétation physique des termes de l'ETR en régime stationnaire

L'ETR peut être interprétée comme un bilan d'énergie. En effet, la luminance  $L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega)$  donne la puissance  $P(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega)$  traversant une surface élémentaire  $dS$ , orientée par  $\mathbf{n}$ , centrée en  $\mathbf{r}$  dans un angle



**Figure 2.5** – Grandeurs permettant de définir la luminance.

solide élémentaire  $d\Omega$ , centré sur la direction  $\mathbf{u}$  :

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) = L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \omega) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS d\Omega. \quad (2.101)$$

La Fig. 2.5 reprend les différentes grandeurs entrant dans cette définition. En radiométrie la luminance correspond au flux d'énergie transporté par un rayon lumineux. Dans la suite, la dépendance en  $\omega$  est omise, l'étude se restreint au cas monochromatique. La densité d'énergie directionnelle  $u(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  est liée à la luminance par

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{L(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{c}, \quad (2.102)$$

$u(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  donne le nombre de photons en  $\mathbf{r}$  allant dans la directions  $\mathbf{u}$ . La densité d'énergie en  $\mathbf{r}$  est donc

$$u(\mathbf{r}) = \int \frac{L(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{c} d\Omega. \quad (2.103)$$

On peut aussi définir le vecteur flux radiatif  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \int L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} d\Omega, \quad (2.104)$$

$\mathbf{q}(\mathbf{r})$  s'identifiant au vecteur de Poynting moyen défini en électromagnétisme.

### Coefficient d'extinction

Lorsqu'un faisceau incident monochromatique se propage dans une direction donnée  $\mathbf{u}$  dans un milieu diffusant avec une puissance  $P(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  en  $\mathbf{r}$ , il est atténué par diffusion et absorption. En passant de  $\mathbf{r}$  à  $\mathbf{r} + ds\mathbf{u}$  ( $ds$  désignant un déplacement selon l'abscisse curviligne) la puissance perdue par le faisceau est donnée par

$$dP_1 = -\mu_{\text{ext}} P(\mathbf{r}, \mathbf{u}) ds. \quad (2.105)$$

Le coefficient  $\mu_{\text{ext}}$  prend en compte la diffusion et l'absorption, on a alors

$$\mu_{\text{ext}} = \mu_{\text{sca}} + \mu_{\text{abs}}, \quad (2.106)$$

$\mu_{\text{sca}}$  décrivant les pertes par diffusion du faisceau incident et  $\mu_{\text{abs}}$  les pertes par absorption. Le milieu est dit absorbant si  $\mu_{\text{abs}} > \mu_{\text{sca}}$ , l'essentiel des pertes se produit alors par absorption, c'est le cas par exemple de l'encre de Chine qui absorbe plus de lumière visible qu'elle n'en diffuse et apparait donc noire. A l'inverse un milieu est dit diffusant si  $\mu_{\text{sca}} > \mu_{\text{abs}}$ , l'essentiel des pertes se fait alors par diffusion et le milieu apparait blanc, c'est le cas par exemple d'un nuage. Le pouvoir diffusant d'un milieu est caractérisé par l'albédo, défini par

$$a = \frac{\mu_{\text{sca}}}{\mu_{\text{sca}} + \mu_{\text{abs}}}. \quad (2.107)$$

Si  $a = 0$  le milieu est purement absorbant et si  $a = 1$  le milieu est purement diffusant.

### Fonction de phase

Lorsqu'un événement de diffusion se produit, une partie de la puissance incidente se propageant selon  $\mathbf{u}$  est déviée dans une autre direction  $\mathbf{u}'$ , contribuant ainsi à augmenter le flux dans la direction  $\mathbf{u}'$ . La quantification de cet effet de la diffusion est effectuée avec la fonction de phase  $p(\mathbf{u}', \mathbf{u})$ . L'accroissement du flux de puissance  $dP_2$  dans la direction  $\mathbf{u}'$  entre les points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} + d\mathbf{s}\mathbf{u}$  est donné par (en dimension trois pour des ondes scalaires)

$$dP_2 = \frac{\mu_{\text{sca}}}{4\pi} \int_{2\pi} p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) P(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\Omega ds, \quad (2.108)$$

où  $\mu_{\text{sca}}$  est le coefficient de diffusion. Dans le cadre de l'approximation de l'échelle, la fonction de phase est liée à la section efficace différentielle de diffusion d'une particule  $\sigma_{\text{sca}}$  par

$$p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{4\pi}{\sigma_{\text{sca}}} \frac{d\sigma_{\text{sca}}}{d\Omega}. \quad (2.109)$$

Avec cette définition la fonction de phase est normalisée :

$$\int p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) d\Omega = 4\pi. \quad (2.110)$$

Dans le cas d'un milieu statistiquement homogène et isotrope la fonction de phase ne dépend que de l'angle relatif  $\theta$  entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}'$  et alors :  $p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = p(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) = p[\cos(\theta)]$ . De plus, si la fonction de phase est constante la diffusion est isotrope, c'est-à-dire que lors d'un événement de diffusion la puissance est uniformément répartie dans toutes les directions, dans le cas contraire la diffusion est dite anisotrope. Le degré d'anisotropie se mesure à l'aide du facteur d'anisotropie  $g$  défini par

$$g = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} p(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) d\Omega. \quad (2.111)$$

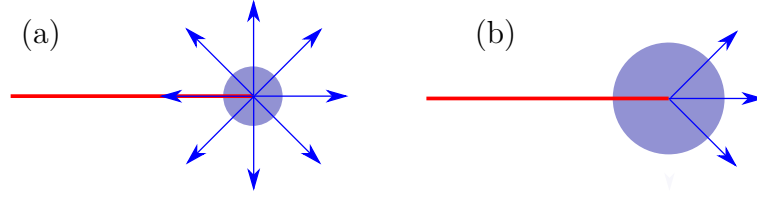
$g$  dépend de la taille des particules. Pour des particules de taille petite devant la longueur d'onde, la diffusion est quasi-isotrope  $g \sim 0$ , et inversement lorsque la taille des particules est grande devant la longueur d'onde  $g \sim 1$ . Ces deux cas sont représentés sur la Fig.2.6. Le coefficient de transport  $\mu^*$ , défini comme  $\mu^* = 1/\ell^*$  ( $\ell^*$  étant le libre parcours moyen de transport), peut aussi être calculé

$$\mu^* = (1 - g)\mu_{\text{sca}}. \quad (2.112)$$

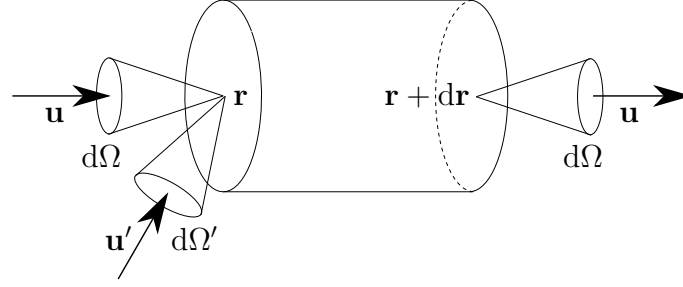
### Établissement de l'équation de transfert radiatif (ETR) par un bilan d'énergie en régime stationnaire

Le bilan d'énergie s'effectue sur le système présenté sur la Fig. 2.7, en passant de  $\mathbf{r}$  à  $\mathbf{r} + d\mathbf{s}\mathbf{u}$ , la variation de puissance se propageant selon  $\mathbf{u}$  s'écrit

$$P(\mathbf{r} + d\mathbf{s}\mathbf{u}, \mathbf{u}) - P(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = dP_1 + dP_2. \quad (2.113)$$



**Figure 2.6** – Schéma du diagramme de rayonnement d'une particule, les particules sont éclairées par la gauche. (a) Cas  $g$  tendant vers zéro (diffusion isotrope). (b) Cas  $g$  tendant vers un (diffusion essentiellement vers l'avant).



**Figure 2.7** – Schéma du volume élémentaire considéré pour l'établissement de l'ETR, la puissance rentre en  $\mathbf{r}$  selon  $\mathbf{u}$  et ressort en  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  selon  $\mathbf{u}$  (avec  $d\mathbf{r} = \mathbf{u}cdt$ )

En remarquant que  $P(\mathbf{r} + d\mathbf{s}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = P(\mathbf{r}, \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{r}}P(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}ds$ , l'équation de transfert radiatif est finalement obtenue :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -\mu_{\text{ext}} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) + \frac{\mu_{\text{sca}}}{4\pi} \int p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L(\mathbf{r}, \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (2.114)$$

L'établissement de l'ETR par un bilan d'énergie montre bien qu'elle n'est valable que si les interférences sont négligées, ce qui est légitime pour  $k_0 \ell_B \gg 1$ . Une explication plus détaillée de cette condition est proposée en introduction du chapitre 3.

## 2.4 Conclusion

En conclusion de ce chapitre les différents concepts et grandeurs utilisés dans ce manuscrit ont été exposés. Les aspects élémentaires de la propagation en milieux désordonnés, comme la figure de speckle, ont été introduits. La façon de décrire le désordre a été détaillée : dans tout le manuscrit les milieux désordonnés sont constitués de particules ponctuelles réparties aléatoirement dans l'espace. Les équations générales régissant le champ moyen (équation de Dyson) et l'intensité moyenne (équation de Bethe-Salpeter) ont été rappelées. Pour les régimes dilués, l'ETR a été établie avec une approche phénoménologique fondée sur un bilan d'énergie.

# Chapitre 3

## Un critère original pour sonder la localisation d'Anderson sans statistique

### Sommaire

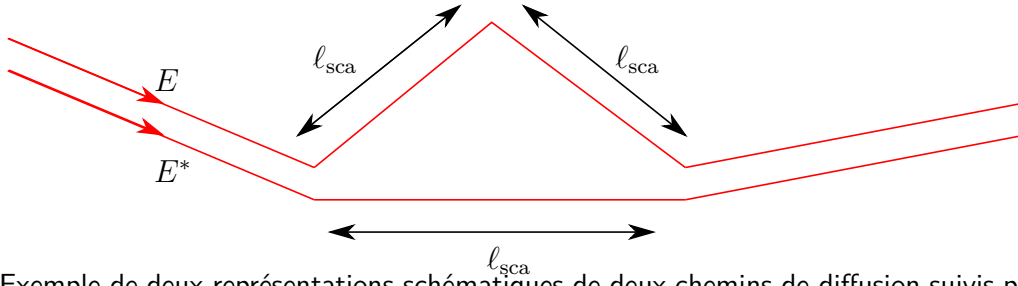
<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>37</b>
3.1.1	Interférences en milieu désordonné	37
3.1.2	Historique de la localisation d'Anderson	38
<b>3.2</b>	<b>Analyse spectrale de la localisation</b>	<b>42</b>
3.2.1	Système et méthode de calcul	42
3.2.2	Spectres en transmission	43
3.2.3	Spectres de LDOS	44
<b>3.3</b>	<b>Manifestation de la localisation d'Anderson sur une seule configuration du désordre</b>	<b>45</b>
3.3.1	Étude du speckle en transmission	45
3.3.2	Un nouveau critère pour la localisation d'Anderson	46
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>48</b>

### 3.1 Introduction

#### 3.1.1 Interférences en milieu désordonné

Dans le chapitre 2, la propagation des ondes dans les systèmes désordonnés a été présentée par une approche fondée sur une équation de transport. Dans cette approche les interférences entre les ondes sont négligées, cette approximation est valable à condition que le libre parcours moyen soit grand devant la longueur d'onde. Cette condition se comprend intuitivement en considérant la Fig. 3.1, elle présente deux chemins de diffusion suivis par le champ  $E$  et son conjugué  $E^*$ . Ces deux chemins ne diffèrent que d'un événement de diffusion, la différence de marche entre les deux est donc de l'ordre d'un libre parcours moyen  $\ell_{\text{sca}}$ . Dans le cas où  $\ell_{\text{sca}} \gg \lambda$  le déphasage entre ces deux chemins varie de manière aléatoire entre 0 et  $2\pi$ , en moyenne la contribution du produit de ces deux chemins est donc nulle. Ce raisonnement vaut pour tout couple de chemins de diffusion de  $E$  et son conjugué  $E^*$ . En notant  $E_1, E_2, \dots$  les différents chemins possibles, l'intensité se réécrit

$$\begin{aligned}\langle EE^* \rangle &= \langle (E_1 + E_2 + \dots)(E_1^* + E_2^* + \dots) \rangle \\ &= \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \dots + \langle E_1 E_2^* \rangle + \langle E_2 E_1^* \rangle + \dots,\end{aligned}$$



**Figure 3.1** – Exemple de deux représentations schématiques de deux chemins de diffusion suivis par le champ  $E$  et son conjugué  $E^*$  dans un milieu désordonné, les deux chemins ne diffèrent que d'un événement de diffusion.

les termes croisés  $\langle E_1 E_2^* \rangle$  sont donc de l'ordre de  $\langle |E_0|^2 e^{i\phi} \rangle$ , avec  $\phi$  un nombre qui fluctue entre 0 et  $2\pi$ . Les termes croisés sont donc nuls en moyenne, l'intensité totale est donc la somme des intensités de chaque chemin de diffusion comme prédit par l'approche utilisant une équation de transport.

Lorsque le libre parcours moyen  $\ell_{\text{sca}}$  se rapproche de la longueur d'onde  $\lambda$ , les interférences entre les différents chemins de diffusion deviennent de moins en moins négligeables en moyenne. Ces effets cohérents résistent alors au processus de moyennage. Dans le cas où  $\ell_{\text{sca}}$  est proche de  $\lambda$ , les interférences changent radicalement la façon dont se propagent les ondes dans le milieu. Si le système est suffisamment grand, elles peuvent être à l'origine du confinement des ondes dans une région donnée de l'espace, cet effet conduisant à la localisation d'Anderson.

### 3.1.2 Historique de la localisation d'Anderson

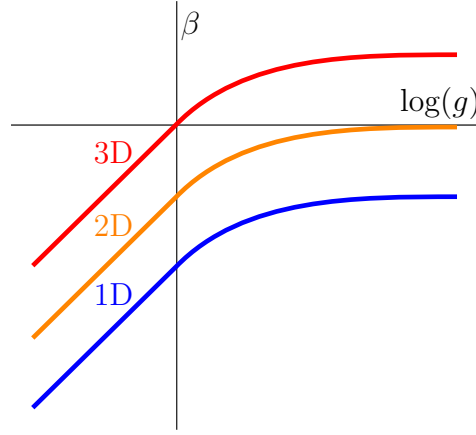
#### Modèle d'Anderson et observations expérimentales

La localisation d'Anderson (ou localisation forte) a été initialement suggérée par P. W. Anderson en 1958, dans le cadre du transport électronique, comme un nouveau mécanisme de la transition métal-isolant dans les solides désordonnés [8]. L'étude portait sur la propagation d'électrons dans un potentiel désordonné et constatait l'absence de diffusion pour des fluctuations suffisamment fortes du potentiel.

La localisation a été confirmée expérimentalement dans le cas du transport électronique [9] et son observation pour d'autres types d'ondes est devenue un champ de recherche très actif. Elle a été mise en évidence pour les ondes acoustiques [11, 39], électromagnétiques [40], les ondes de matières [10] ainsi qu'optiques [12, 41]. Toutefois le cas de ces dernières, au moins en trois dimensions, reste sujet à controverses, notamment à cause de l'absorption [13], des non-linéarités [12], de la fluorescence [42] et de l'influence de la polarisation [14].

#### Théorie de loi d'échelle et théorie auto-cohérente pour la localisation d'Anderson

Au delà du modèle original d'Anderson, une des premières théories relative à la localisation et ayant rencontré un grand succès a été la théorie de loi d'échelle, étudiant la relation qui existe entre la conductance adimensionnée  $g$  et la variable  $\beta = \partial \log(g) / \partial \log(L)$  [43], où  $L$  est la taille du système. Le résultat de cette approche est schématisé sur la Fig. 3.2.  $\beta$  négatif signifie que la conductance diminue lorsque la taille du système augmente, ce qui est compatible avec l'image intuitive du régime localisé, les zones où les ondes sont localisées étant de moins en moins accessibles pour les électrons en entrée du système.  $\beta$  positif indique au contraire que le système est en régime diffusif. Cette théorie indique notamment que la localisation a toujours lieu en dimension un et deux pour des systèmes



**Figure 3.2** – Tracé de  $\beta = \partial \ln(g)/\partial \ln(L)$  en fonction de  $\ln(g)$  pour différentes dimensions d'espace.

de taille suffisamment grande et qu'en dimension trois se produit une transition de phase pour une certaine valeur de la conductance.

Une autre approche est celle de la théorie auto-cohérente, cette théorie vise à établir une description utilisant une équation de transport en tenant compte des interférences, notamment en renormalisant le coefficient de diffusion par l'intensité dans le système [44, 45]. Dans la suite, nous étudions le cas des ondes scalaires en dimension deux. Dans cette géométrie, la théorie donne deux équations couplées [46, 47] :

$$\begin{cases} (-D(\Omega)\nabla^2 + i\Omega)u(\Omega, D, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{D(\Omega)} = \frac{1}{D_B} \left( 1 + \frac{1}{\pi\rho} u(\Omega, D, \mathbf{r} = 0) \right) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est la variable de Fourier conjuguée du temps (pulsation),  $D(\Omega)$  est le coefficient de diffusion,  $D_B$  est le coefficient de diffusion de Boltzmann,  $\rho$  est la densité d'états et  $u$  est la densité d'énergie. Cette théorie donne le comportement qualitatif des ondes dans le milieu. En régime de localisation, lorsque le coefficient de diffusion est nul, la densité d'énergie décroît exponentiellement sur une distance  $\xi$ , appelée longueur de localisation. Pour des ondes scalaires en dimension deux, la théorie auto-cohérente permet d'en obtenir une estimation [46, 47] (voir détail du calcul en annexe A) :

$$\xi = \ell_B \exp\left(\frac{\pi}{2} k_0 \ell_B\right), \quad (3.2)$$

$\ell_B$  est le libre parcours moyen de Boltzmann (libre parcours moyen de diffusion en diffusion indépendante) et  $k_0$  le module du vecteur d'onde dans le vide. Bien qu'elle corresponde à une approximation, au vu de la complexité du système, elle constitue un apport significatif. Ainsi, si la taille du système est beaucoup plus petite que  $\xi$  le système est en régime diffusif et si la taille du système est beaucoup plus grande devant  $\xi$  alors le système est en régime de localisation. Aussi, la longueur de localisation dépend exponentiellement du produit  $k_0 \ell_B$ , elle peut donc devenir rapidement considérable. L'observation de la localisation d'Anderson peut donc devenir très difficile si la taille des systèmes nécessaires devient très grande.

Il est important de noter que la théorie de loi d'échelle et la théorie auto-cohérente portent sur des grandeurs moyennées, ceci tient au fait que historiquement elles ont d'abord été développées pour les électrons. Pour ces derniers, seules sont accessibles expérimentalement des grandeurs moyennées comme la conductance (l'observation directe d'une figure de speckle n'est pas possible).



### Approche de matrices aléatoires à la localisation

En géométrie quasi-1D (guide d'onde) il existe également une autre approche, celle des matrices aléatoires. Elle permet aussi de déterminer une expression de la longueur de localisation  $\xi$ . Dans le cas d'un guide d'onde désordonné, il y a un nombre fini de modes d'entrée (modes  $a^+$  et  $b^-$  sur la Fig. 3.3) et de sortie (modes  $b^+$  et  $a^-$  sur la Fig. 3.3). La propagation des ondes est décrite par une matrice  $S$  reliant ces différents modes :

$$c^{\text{out}} = S c^{\text{in}}, \quad (3.3)$$

où  $c^{\text{in}} = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_N^+, b_1^-, b_2^-, \dots, b_N^-)$  et  $c^{\text{out}} = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_N^-, b_1^+, b_2^+, \dots, b_N^+)$  (le nombre total de modes est  $4N$ ),  $c^{\text{in}}$  correspond aux modes qui entrent dans la structure et  $c^{\text{out}}$  correspond aux modes qui en sortent. La matrice  $S$  a ainsi la forme suivante :

$$S = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Les matrices  $r$  et  $r'$  sont des matrices de réflexion de tailles  $N \times N$ , réflexion à gauche pour la matrice  $r$  et à droite pour la matrice  $r'$ . De la même manière, les matrices  $t$  et  $t'$  sont des matrices de transmission. Afin de refléter la complexité du système les coefficients de ces matrices sont aléatoires mais tout de même contraints dans le cas le plus général par le théorème de réciprocity et la conservation de l'énergie, ce qui implique que la matrice  $S$  soit unitaire et symétrique :

$$S^{-1} = S^\dagger \text{ et } S = S^T. \quad (3.5)$$

Avec cette contrainte, les matrices  $tt^\dagger$ ,  $t't'^\dagger$ ,  $1 - rr^\dagger$  et  $1 - r'r'^\dagger$  partagent les mêmes valeurs propres de transmission  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , chacune d'elle est comprise entre 0 et 1. La matrice  $S$  se réécrit avec  $\mathcal{T} = \text{diag}(T_1, T_2, \dots, T_N)$  [48, 49] :

$$S = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\mathcal{T}} & \sqrt{\mathcal{T}} \\ \sqrt{\mathcal{T}} & \sqrt{1-\mathcal{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' & 0 \\ 0 & V' \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

où les matrices  $U, V, U'$  et  $V'$  sont quatre matrices unitaires de taille  $N \times N$ . Les valeurs propres  $T_n$  se mettent sous la forme [50] :

$$T_n = \frac{1}{\cosh^2(x_n)}. \quad (3.7)$$

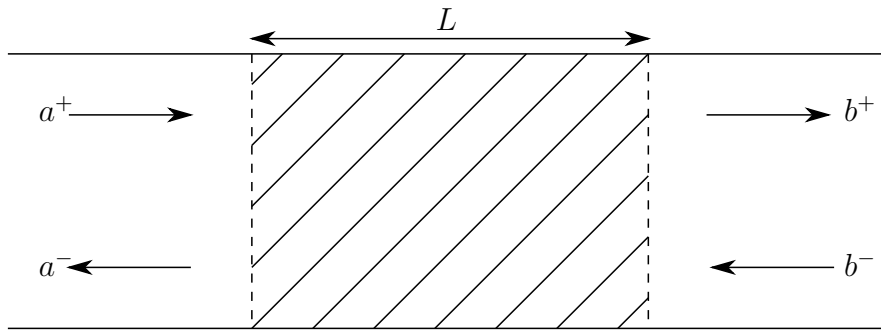
Lorsque la taille  $L$  du système tend vers l'infini, les fluctuations des  $x_n$  tendent vers 0 [48, 50–53], leur comportement asymptotique est alors

$$x_n \sim \frac{N - (n-1)L}{N} \frac{L}{\ell}. \quad (3.8)$$

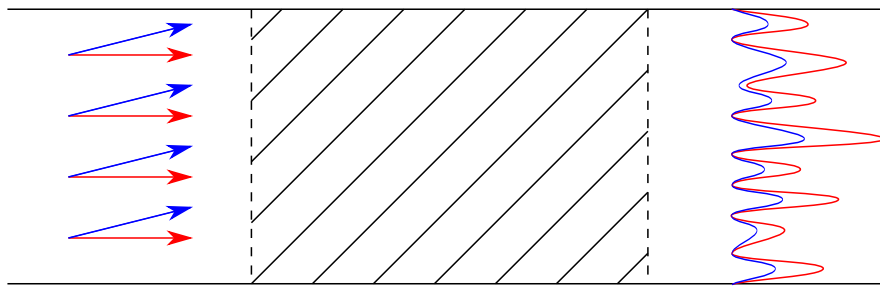
où  $\ell$  est le libre parcours moyen. Donc lorsque  $L$  tend vers l'infini les valeurs propres de transmission se comportent comme

$$T_n \sim \exp \left( -2 \frac{N - (n-1)L}{N} \frac{L}{\ell} \right). \quad (3.9)$$

Dans ces systèmes, la longueur de localisation  $\xi$  est la plus grande des extensions spatiales des modes [53]. Donc  $\xi \sim N\ell$  d'après l'Eq. (3.9). En régime de localisation, lorsque  $L \gg \xi$  tous les modes s'amortissent exponentiellement et un seul mode (celui dont l'extension spatiale est  $\xi$ ) domine exponentiellement tous les autres.



**Figure 3.3** – Schéma d'un guide d'onde désordonné de taille  $L$ . Les modes  $a$  sont à gauche du guide d'onde et les modes  $b$  sont à droite. Les modes avec un exposant « + » se propagent de la gauche vers la droite, ceux avec un exposant « - » se propagent de la droite vers la gauche.



**Figure 3.4** – Schéma d'un guide d'onde en régime de localisation. Le guide d'onde est éclairé par la gauche selon deux angles d'incidence différents, les figures de speckle sont observées en sortie à droite. En régime de localisation, la figure de speckle est imposée par un seul mode, seule l'amplitude du speckle change selon l'efficacité du couplage entre l'éclairement et le mode.

Or contrairement aux électrons, la longueur de cohérence des ondes électromagnétiques est quasiment infinie et il est possible d'observer le champ pour une réalisation particulière du désordre [54–56] et de mesurer une figure de speckle (définie au chapitre 2). Cette particularité du cas quasi-1D est intéressante en optique car si le système est en régime de localisation, un mode domine exponentiellement tous les autres et impose donc l'allure de la figure de speckle en transmission [57]. La figure de speckle est alors indépendante des conditions d'illumination puisqu'un seul mode y contribue significativement, comme l'illustre la Fig. 3.4. Cette particularité a été observée dans des expériences utilisant des micro-ondes [58] et a des implications pour le contrôle de front d'onde à travers un guide d'onde désordonné [59] ou le contrôle des canaux de transmission [57]. Ainsi, en changeant les conditions d'illumination, il est, a priori, possible de déterminer avec une seule configuration si le système est en régime localisé ou non, ce qui constitue une approche originale comparée aux deux précédentes.

L'objectif de ce chapitre est de montrer que cette invariance du speckle transmis avec les conditions d'illumination observée en géométrie quasi-1D en régime de localisation l'est encore pour un système ouvert en deux dimensions et de proposer cette propriété d'invariance comme un critère de localisation. Une caractérisation spectrale de la localisation est d'abord réalisée sur une configuration unique du désordre à l'aide de simulations numériques exactes, en particulier pour discriminer entre les régimes localisé et diffusif. Puis à partir de cette caractérisation une étude de la figure de speckle transmis est effectuée afin de proposer un nouveau critère pour la localisation d'Anderson sur une configuration unique du désordre pour un système ouvert en deux dimensions. Ces travaux ont été publiés dans *Physical Review A* [60].

## 3.2 Analyse spectrale de la localisation

### 3.2.1 Système et méthode de calcul

Le système d'étude est présenté sur la Fig. 3.5. Il s'agit d'un ensemble de  $N = 17500$  tiges, réparties aléatoirement dans un rectangle de longueur  $F = 1.05 \times 10^{-4}$  m et de largeur  $L = 4.19 \times 10^{-5}$  m, petite devant  $F$  pour approcher une tranche et s'affranchir des effets de taille finie. Le rayon des tiges est supposé petit devant la longueur d'onde  $\lambda$  pour qu'elles puissent être traitées dans l'approximation dipolaire. La réponse des tiges à une onde polarisée en TE (le champ électrique est parallèle aux tiges) est représentée par une polarisabilité  $\alpha(\omega)$  donnée par

$$\alpha(\omega) = -\frac{2\Gamma_R c^2}{\omega^2(\omega - \omega_0 + i\Gamma_R/2)}, \quad (3.10)$$

où  $\omega = 2\pi c/\lambda$  est la fréquence,  $\lambda$  étant la longueur d'onde dans le vide. Il s'agit d'une polarisabilité d'un oscillateur résonnant de fréquence de résonance  $\omega_0$  et de largeur spectrale  $\Gamma_R$ ,  $\omega_0$  et  $\Gamma_R$  dépendent des propriétés géométriques et diélectriques des tiges, c'est-à-dire de leur section  $S$  et constante diélectrique  $\epsilon(\omega)$  (voir chapitre 2). Dans la suite,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$  et  $\Gamma_R = 5 \times 10^{16} \text{s}^{-1}$ , de sorte que le facteur de qualité soit faible, limitant ainsi les variations de la section efficace de diffusion sur une large gamme spectrale. En fonction de la polarisabilité, la section efficace d'extinction  $\sigma_{\text{ext}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{ext}} = k_0 \text{Im}[\alpha], \quad (3.11)$$

et la section efficace de diffusion  $\sigma_{\text{sca}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{k_0^3}{4} |\alpha|^2, \quad (3.12)$$

$k_0$  étant le module du vecteur d'onde dans le vide. Cette polarisabilité vérifie le théorème optique, c'est-à-dire  $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{sca}}$  pour un milieu non absorbant.

Le système est éclairé par un faisceau gaussien en polarisation TE dont l'expression est donnée par

$$E_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{E_0}{\sqrt{1+ia}} \exp \left[ ik_0 r_{\parallel} - \frac{r_{\perp}^2}{w^2(1+ia)} \right], \quad (3.13)$$

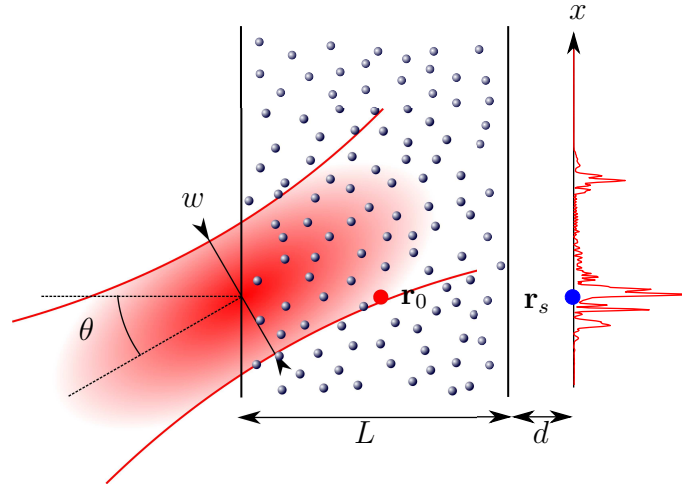
où  $a = 2r_{\perp}/(kw^2)$ ,  $r_{\parallel}$  est la composante de  $\mathbf{r}$  selon la direction de propagation et  $r_{\perp}$  la composante transverse. La largeur du faisceau gaussien est  $w = 2.1 \times 10^{-5}$  m, petite comparée à  $F$  afin de s'affranchir des effets de taille finie. Le faisceau est focalisé en un point de l'interface et la direction d'incidence est donnée par l'angle  $\theta$ .

La résolution des équations de Maxwell dans le système s'effectue par la méthode des dipôles couplés [27]. Cette méthode consiste à déterminer le champ exciteur sur chacun des dipôles. Par principe de superposition, le champ exciteur total sur un dipôle est la somme du champ de la source et des champs produits par les autres dipôles. Chaque dipôle  $j$  est soumis un champ exciteur  $E_j^{\text{exc}}$ , son amplitude est donc

$$p_j = \epsilon_0 \alpha E_j^{\text{exc}}. \quad (3.14)$$

Le champ  $E_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega)$  produit par le dipôle  $j$  en  $\mathbf{r}$  est donné par

$$E_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \alpha E_j^{\text{exc}} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega), \quad (3.15)$$



**Figure 3.5** – Allure du milieu désordonné. Le faisceau incident gaussien est focalisé en un point de l'interface avec un angle  $\theta$ .  $\mathbf{r}_0$  est un point à l'intérieur du système où la LDOS  $\rho(\mathbf{r}_0, \omega)$  est calculée.  $\mathbf{r}_s$  est un point de l'écran où l'intensité transmise  $I(\mathbf{r}_s, \omega)$  est calculée. Le tracé rouge en ligne pleine sur l'axe  $x$  correspond à un exemple de figure de speckle calculée.

$G_0$  est la fonction de Green 2D scalaire dans le vide, elle est solution de (voir chapitre 2) :

$$-\Delta G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.16)$$

avec une condition d'onde sortante à l'infini. Son expression est donnée par :

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (3.17)$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel d'ordre zéro et de premier type. Le champ exciteur sur le dipôle  $j$  est finalement donné par

$$E_j^{\text{exc}} = E_0(\mathbf{r}_j, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N G_0(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l, \omega) E_l^{\text{exc}}. \quad (3.18)$$

L'Eq. (3.18) définit un ensemble de  $N$  équations à  $N$  inconnues (les champs  $E_j^{\text{exc}}$ ), la résolution s'opère par une procédure d'inversion de matrice. Dès que le champ exciteur est connu sur chaque diffuseur, le champ peut être calculé en n'importe quelle position  $\mathbf{r}$  de l'espace en utilisant

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E_0(\mathbf{r}, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{j=1}^N G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega) E_j^{\text{exc}}. \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Spectres en transmission

La première étape de l'étude est de trouver une gamme de fréquence pour laquelle le système est en régime de localisation et une autre en régime diffusif afin de comparer les deux comportements. La longueur de localisation est donnée par l'Eq. (3.2) :

$$\xi = \ell_B \exp\left(\frac{\pi}{2} k_0 \ell_B\right). \quad (3.20)$$

Le libre parcours moyen de Boltzmann est donné par

$$\ell_B = \frac{1}{\rho \sigma_{\text{sca}}}, \quad (3.21)$$

$\rho$  est la densité et  $\sigma_{\text{sca}}$  est la section efficace de diffusion calculée avec l'Eq. (3.12). Ainsi la longueur de localisation dépend de la fréquence  $\omega$ .

La bande de fréquence pour l'étude du régime localisé est choisie de telle manière que  $L \gg \xi(\omega)$  pour toute fréquence  $\omega$  de la bande. La bande de fréquence pour le régime diffusif est telle que  $L \ll \xi(\omega)$  pour tout  $\omega$  dans la bande. Pour le régime localisé, la bande de fréquence choisie est centrée autour de  $\omega_c^l = 1.50 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$  et sa largeur est  $10^{13} \text{s}^{-1}$ , la longueur de localisation est alors  $\xi(\omega) = 0,09L$  sur la bande. Pour le régime diffusif la fréquence centrale choisie est  $\omega_c^d = 2.70 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$  et sa largeur est  $10^{13} \text{s}^{-1}$ , la longueur de localisation est alors  $\xi(\omega) = 40L$  sur la bande. Le tableau suivant reprend les principaux paramètres ( $b$  étant l'épaisseur optique  $L/\ell_B$ ) :

	$\omega_c(\text{s}^{-1})$	$k_0\ell_B$	$\xi(\text{m})$	$\xi/L$	$\ell_B(\text{m})$	$b$
régime localisé	$1.50 \times 10^{15}$	1.57	$3.77 \times 10^{-6}$	0.09	$3.15 \times 10^{-7}$	133
régime diffusif	$2.70 \times 10^{15}$	5.1	$1.7 \times 10^{-3}$	40	$5.66 \times 10^{-7}$	74

La prédiction des comportements est vérifiée numériquement à partir du calcul des spectres de l'intensité transmise  $I(\mathbf{r}_s, \omega) = |E(\mathbf{r}_s, \omega)|^2$  [calculée avec l'Eq.(3.19)], la position  $\mathbf{r}_s$  étant située en sortie du milieu à une distance  $d = 2\lambda_c^{l,d}$  de l'interface comme montré sur la Fig. 3.5. Sur la Fig. 3.6(a) est présenté le spectre autour de  $\omega_c^l$  (ligne bleue continue), il présente de fortes variations avec de nombreux pics très fins correspondant à une fréquence de résonance spécifique. Ce comportement est attendu en régime localisé. En effet, l'espacement spectral  $\Delta\omega$  entre deux modes  $y$  est beaucoup plus grand que la largeur spectrale  $\delta\omega$  des modes, la conductance adimensionnée de Thouless  $g = \delta\omega/\Delta\omega$  est alors petite devant un [61]. À l'inverse sur la Fig. 3.6(b) le spectre en transmission (ligne bleue continue) en régime diffusif est lisse et présente beaucoup moins de variations. Le spectre est un continuum car l'espacement entre les modes est inférieur à leurs largeurs, dans ce cas  $\Delta\omega$  est petit devant  $\delta\omega$  ( $g \gg 1$ ) et les pics se recouvrent.

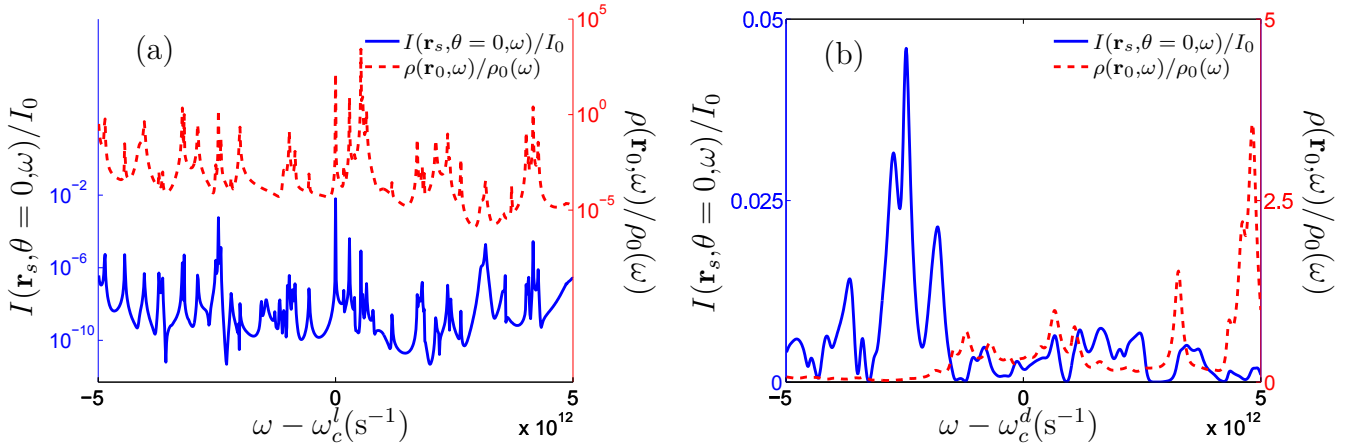
### 3.2.3 Spectres de LDOS

Pour approfondir l'étude, les spectres de LDOS (définie au chapitre 2) sont calculés au centre du système. La LDOS est donnée par [17]

$$\rho(\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{2\omega}{\pi c^2} \text{Im}[G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega)], \quad (3.22)$$

où  $G$  est la fonction de Green du milieu. Elle est déduite de l'Eq. (3.19) en utilisant un dipôle source. En effet le champ total résultant est directement proportionnel à  $G$ . La LDOS est alors déterminée en calculant la partie imaginaire de ce champ à la position  $\mathbf{r}_0$ .

Les spectres de LDOS sont aussi représentés sur la Fig. 3.6 (lignes rouges pointillées). En régime localisé les deux spectres (transmission et LDOS) sont très proches, la correspondance pic à pic est frappante. Lorsque le spectre en transmission présente un pic à une fréquence  $\omega$ , le spectre de LDOS présente également un pic à la même fréquence  $\omega$ . Ceci est cohérent avec le fait qu'à cette fréquence  $\omega$  la transmission soit due essentiellement à un mode [62]. À l'inverse en régime diffusif de nombreux modes contribuent à la transmission et la LDOS mais avec des poids différents. Les spectres présentent alors beaucoup moins de similitudes qu'en régime localisé, bien que des corrélations existent.

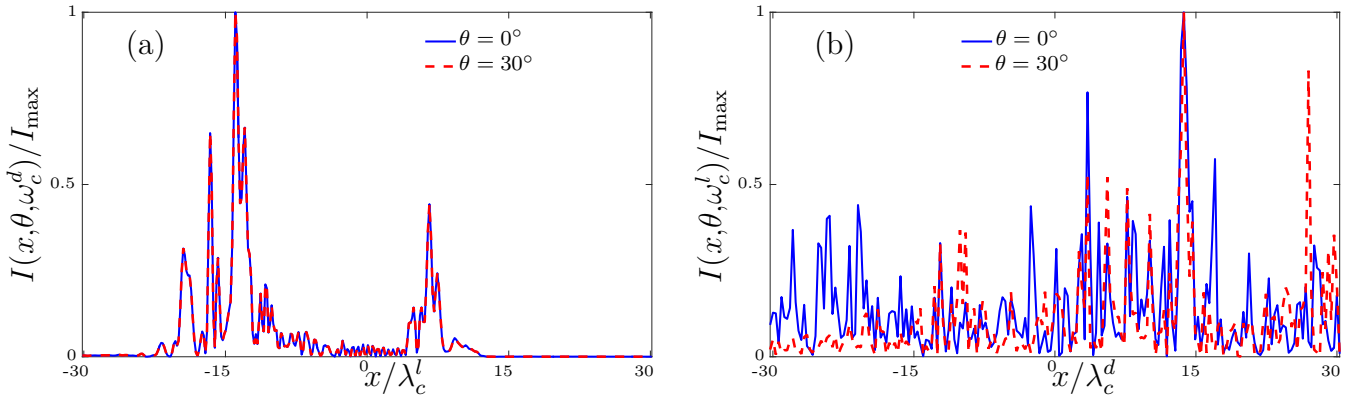


**Figure 3.6** – Spectres d'intensité  $I(\mathbf{r}_s, \omega)/I_0$  pour  $\theta = 0$  en un point  $\mathbf{r}_s$  sur l'écran en sortie du système (lignes bleues continues) et spectres de LDOS normalisées  $\rho(\mathbf{r}_0, \omega)/\rho_0$  en un point  $\mathbf{r}_0$  au centre du milieu désordonné (lignes rouges pointillées),  $\rho_0$  étant la LDOS du vide. (a) Régime localisé : le spectre est centré en  $\omega_c^l$  telle qu'à cette fréquence  $\xi/L \sim 0.09$ . (b) Régime diffusif : le spectre est centré en  $\omega_c^d$  telle qu'à cette fréquence  $\xi/L = 40$

### 3.3 Manifestation de la localisation d'Anderson sur une seule configuration du désordre

#### 3.3.1 Étude du speckle en transmission

Les régimes localisé et diffusif étant maintenant bien caractérisés pour une configuration particulière du désordre, il est possible de passer à l'étude de la figure de speckle transmise sur un écran positionné à une distance  $d = 2\lambda_c^{l,d}$  en sortie du milieu. La Fig. 3.7 montre l'intensité  $I(x, \theta, \omega)$  sur l'écran, orienté selon l'axe  $x$  sur la Fig. 3.5, pour deux angles d'illumination différents. En régime localisé la fréquence choisie est  $\omega_c^l$ , car elle correspond à un pic à la fois pour le spectre en transmission et pour le spectre de LDOS. Le résultat correspondant est présenté sur la Fig. 3.7(a), les profils d'intensité sont calculés pour  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 30^\circ$  et normalisés par leurs valeurs maximales  $I_{\max}$ . Les allures des deux profils sont très proches, ce qui montre, de la même manière qu'en géométrie quasi-1D [57], qu'un seul mode domine la transmission et donne l'allure de la figure de speckle. Cette allure est donc indépendante des conditions d'excitation du mode, qui n'influencent que l'amplitude de l'intensité selon l'efficacité du couplage entre le faisceau incident et ce mode. Dans le cas du régime diffusif, présenté Fig. 3.7(b), les allures du speckle transmis sont très différentes. C'est un résultat attendu dans le cas où de nombreux modes contribuent à la transmission. En changeant l'illumination, la contribution relative des différents modes à la transmission est aussi modifiée, faisant ainsi varier la figure de speckle transmis.



**Figure 3.7** – Intensité transmise normalisée  $I(x, \theta, \omega)/I_{\max}$  ( $I_{\max}$  désigne l'intensité maximale sur la figure de speckle) en fonction de la position normalisée ( $x/\lambda$ ) pour les incidences  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 30^\circ$ . (a) Régime localisé avec  $\omega = \omega_c^l$ . (b) Régime diffusif avec  $\omega = \omega_c^d$ .

### 3.3.2 Un nouveau critère pour la localisation d'Anderson

#### Définition de la fonction de similarité

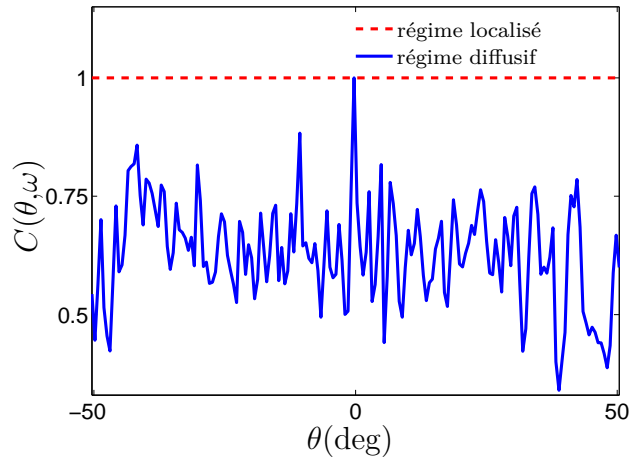
Pour rendre compte de l'invariance de la figure de speckle transmis avec les conditions d'illumination, une fonction de similarité  $C(\theta, \omega)$  est définie de la manière suivante :

$$C(\theta, \omega) = \frac{\int I(x, \theta = 0, \omega) I(x, \theta, \omega) dx}{\sqrt{\int I(x, \theta = 0, \omega)^2 dx \int I(x, \theta, \omega)^2 dx}}. \quad (3.23)$$

Cette fonction de similarité est proposée comme un nouvel outil simple pour distinguer le régime de localisation du régime diffusif. Au numérateur de l'Eq. (3.23) il faut reconnaître un produit scalaire entre  $I(x, \theta = 0, \omega)$  et  $I(x, \theta, \omega)$  et au dénominateur le produit des normes correspondantes de  $I(x, \theta = 0, \omega)$  et  $I(x, \theta, \omega)$ . D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz le produit scalaire est égal au produit des normes lorsque les deux vecteurs sont proportionnels, et il est inférieur (en valeur absolue) sinon. Ainsi la définition de Eq. (3.23) est telle que lorsque  $I(x, \theta, \omega)$  et  $I(x, \theta = 0, \omega)$  sont proportionnelles cette fonction vaut un. Elle est inférieure à un dans le cas contraire. Il est important de noter que cette définition n'inclut pas de moyenne statistique et ne porte que sur une seule réalisation particulière du désordre.

#### Comparaison des régimes localisé et diffusif

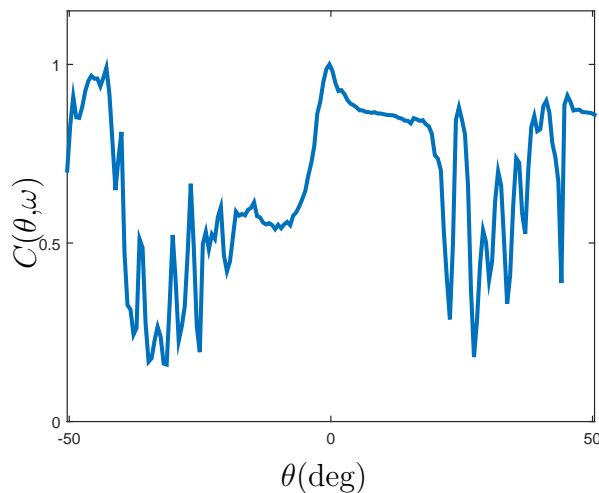
Afin de montrer que cette fonction de similarité discrimine parfaitement le régime localisé du régime diffusif à partir de la mesure du speckle transmis d'une configuration unique du désordre, le tracé de  $C(\theta, \omega)$  en fonction de  $\theta$  pour une fréquence  $\omega$  fixée est représenté sur la Fig. 3.8 dans le cas du régime localisé ( $\omega = \omega_c^l$  en rouge) et diffusif ( $\omega = \omega_c^d$  en bleu). Dans le cas du régime localisé cette fonction est égale à un pour tout  $\theta$  car le profil d'intensité est imposé par un seul mode. En revanche dans le cas du régime diffusif cette fonction vaut un pour  $\theta = 0$  et décroît très rapidement à 0.6 lorsque  $\theta$  augmente ou diminue car l'allure du profil d'intensité est donnée par plusieurs modes dont les contributions varient avec les conditions d'illumination. Il est donc possible de différencier le régime localisé du régime diffusif. Ce critère est particulièrement intéressant d'un point de vue expérimental car il peut être appliqué à partir d'une mesure sur une seule réalisation du désordre.



**Figure 3.8** – Fonction de similarité  $C(\theta, \omega)$  en fonction de l'angle  $\theta$  en régimes localisé et diffusif.

### Étude en régime localisé pour une fréquence hors d'un pic

La même étude a été menée pour une fréquence décalée de  $1.4 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$  par rapport à  $\omega_c^l$ , choisie ainsi car elle correspond à un creux dans les spectres de la Fig. 3.6(a). La fonction de similarité calculée pour cette fréquence est montrée sur la Fig. 3.9. Sur les spectres de la Fig. 3.6(a) il n'y a pas de pics à cette fréquence, ce qui signifie que plusieurs modes contribuent à la conductance aussi faible soit-elle. Cela laisse penser que le mode associé à cette fréquence, s'il existe, est spatialement situé ailleurs que dans la zone éclairée. Ce sont donc les modes proches spatialement et proches en fréquences qui assurent la transmission. L'allure de la fonction de similarité laisse néanmoins penser qu'un petit nombre de modes contribue à la conductance, car la fonction de similarité a des valeurs proches de l'unité pour  $\theta$  entre  $0^\circ$  et  $20^\circ$  et même quasiment égale à un pour  $\theta = -43^\circ$ .



**Figure 3.9** – Fonction de similarité  $C(\theta, \omega)$  en fonction de l'angle  $\theta$  en régime localisé pour une fréquence  $\omega$  décalé de  $1.4 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$  par rapport à  $\omega_c^l$

### Réflexion sur la légitimité du critère

Bien que ces résultats aient été vérifiés pour d'autres configurations, il est légitime de se demander s'il n'est pas possible de trouver une configuration du désordre pathologique qui, par exemple, ne



présenterait pas cette invariance en régime localisé. En effet dans l'approche statistique habituelle, un processus aléatoire génère des échantillons appartenant soit à la classe des échantillons donnant lieu au régime diffusif, soit à la classe des échantillons donnant lieu au régime localisé, la distinction entre les deux classes étant effectuée avec l'étude de grandeurs moyennées comme la conductance de Thouless ou la longueur de localisation. Ne considérer qu'un seul échantillon c'est prendre le risque d'en choisir un qui appartienne aux deux classes et présentant des propriétés singulières différentes des propriétés moyennes des deux classes. Cependant, une telle possibilité est extrêmement improbable car elle induit de nombreuses contraintes, par exemple entre les positions des diffuseurs, de sorte qu'en tirant complètement au hasard une configuration, celle-ci ne satisfasse pas ou peu ces contraintes. Bien qu'une étude de cet aspect rigoureuse soit pour l'instant hors de portée, il semble cependant raisonnable de suggérer la fonction de similarité comme un outil robuste pour différencier les régimes diffusif et localisé.

### 3.4 Conclusion

En conclusion, la localisation d'Anderson a été étudiée numériquement dans un cadre non statistique sur une configuration unique du désordre pour un système ouvert en dimension deux. Le régime localisé a d'abord été caractérisé à l'aide d'une étude spectrale de l'intensité transmise ainsi que de la LDOS dans le système. En régime localisé, grâce à la répartition des modes, les deux spectres présentent de fortes similarités, indiquant la prédominance d'un mode sur la transmission. Pour mettre en évidence d'une façon simple cette particularité de la localisation, une fonction de similarité a été introduite pour évaluer les variations de la figure du speckle transmis avec les conditions d'illumination. En régime localisé cette fonction reste proche de l'unité alors qu'elle est nettement inférieure en régime diffusif. Cette fonction de similarité est proposée comme un critère pour discriminer entre les régimes diffusif et localisé à partir de mesures dans une seule réalisation du désordre. À partir de ces résultats, une collaboration avec Yong Chen de l'ENS, pour la réalisation d'échantillons, et Valentina Krachmalnikoff de l'Institut Langevin, pour les mesures optiques, a été lancée afin de valider expérimentalement ce critère. Ces résultats fournissent également un excellent point de départ pour l'éventuelle mise en évidence de la localisation d'Anderson pour des ondes vectorielles en dimension trois, qui constitue la suite naturelle de ces travaux.

# Chapitre 4

## Structures hyperuniformes : propriétés géométriques et génération numérique

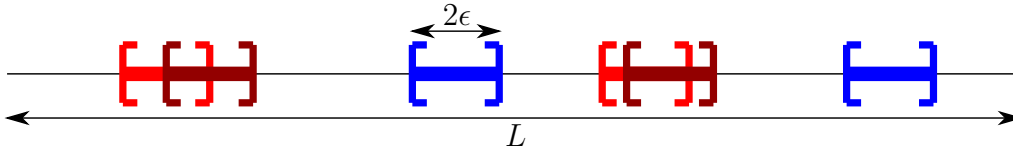
### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Facteur de structure</b>	<b>50</b>
<b>4.3</b>	<b>Mesure de l'ordre dans un arrangement de points</b>	<b>54</b>
4.3.1	Fluctuations de densités normalisées	54
4.3.2	Définition d'un arrangement de points hyperuniforme	55
4.3.3	Lien avec le facteur de structure	55
<b>4.4</b>	<b>Méthode de génération des milieux hyperuniformes</b>	<b>56</b>
4.4.1	Principe de la méthode	56
4.4.2	Génération numérique de structures hyperuniformes	59
4.4.3	Robustesse des configurations	60
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>60</b>

### 4.1 Introduction

Le répartition d'objets identiques dans l'espace constitue un domaine d'étude passionnant et même ludique. Cette répartition peut donner des propriétés particulières à l'ensemble. Une des grandeurs d'intérêt est la fraction volumique, c'est-à-dire le volume occupé par les objets rapporté au volume total. Par exemple pour des objets sphériques en trois dimensions la fraction volumique maximale évolue de 0.54 pour un arrangement aléatoire à 0.74 pour un arrangement cristallin cubique face centrée. Les applications industrielles de ce domaine sont nombreuses. Citons en particulier le cas des bonbons M&M's, dont la forme permet d'atteindre une fraction volumique de 0.71 en arrangement aléatoire [63], ce qui est proche du maximum théorique dans le cas d'un arrangement ordonné. Aussi, afin d'illustrer l'ancienneté de cette thématique, mentionnons le cas des tétraèdres. Dans l'antiquité, Aristote fut le premier à s'interroger sur la possibilité pour les tétraèdres de remplir l'espace et conjectura, à tort, qu'ils le pouvaient. La fraction volumique maximale des tétraèdres est toujours un domaine de recherche très actif [64] et constitue même un cas particulier du 18ème problème de Hilbert.

Il existe d'autres caractéristiques intéressantes, notamment les fluctuations de densité des systèmes complexes. Elles constituent un domaine de grand intérêt, notamment pour ses applications en physique des liquides [65] ou pour l'étude de la structuration à grande échelle de l'univers [66, 67].



**Figure 4.1** – Exemple d'un système à une dimension évoluant vers un état absorbant. Le système est de longueur  $L$ , la largeur des particules est  $2\epsilon$  et leur densité est  $\rho$ . Les particules bleues sont inactives (elles ne recouvrent pas de particules), les particules rouges sont actives (elles recouvrent partiellement une autre particule) et seront déplacées au cours de la procédure

Récemment une nouvelle classe de structures ayant des propriétés spécifiques vis à vis des fluctuations de densité a émergé. Initialement dénommées « structures superhomogènes » et maintenant appelées « structures hyperuniformes », ces structures sont désordonnées mais possèdent des corrélations géométriques réduisant les fluctuations de densité, les rendant ainsi homogènes à grande échelle. De manière équivalente, dans l'espace de Fourier ces corrélations font tendre le facteur de structure vers zéro pour les petits vecteurs d'onde. Initialement, les propriétés géométriques de ces structures ont été étudiées pour des problèmes de maximisation du remplissage [68–72].

Les propriétés thermodynamiques des états absorbants [73], peuvent aussi être décrites avec l'hyperuniformité [74]. Si au cours de son évolution un système se retrouve piégé dans un état, alors cet état est un état absorbant. Il existe de nombreuses méthodes pour obtenir un état absorbant, la Fig. 4.1 présentant l'une d'elles en dimension un. Le système est constitué de particules de largeur  $2\epsilon$  avec une densité  $\rho$ . Au cours de la procédure, les particules sont considérées une par une, si la particule recouvre une autre alors celle-ci est déplacée d'une quantité aléatoire  $\zeta$  uniformément répartie dans  $[-\epsilon, \epsilon]$ . À l'inverse, si la particule n'en recouvre aucune autre, alors celle-ci n'est pas déplacée. La procédure se poursuit jusqu'à ce que toutes les particules restent immobiles, ce qui se produit lorsque le système ne présente plus aucun recouvrement. Le système est alors dans un état absorbant, les particules tendent alors à être uniformément réparties dans l'espace. À l'inverse si le système évolue indéfiniment, celui-ci n'est pas dans un état absorbant. Le paramètre critique est la densité  $\rho$  : à faible densité il sera facile pour les particules de se séparer, alors qu'à haute densité cela tend à être particulièrement improbable. La densité critique  $\rho_c$  est telle que pour  $\rho < \rho_c$  le système évolue toujours vers un état absorbant alors pour  $\rho > \rho_c$ , il peut ne pas atteindre cet état. C'est autour de cette densité critique que les particules s'arrangent de manière hyperuniforme [74]. Cette étude est intéressante car elle permet la génération numérique de milieux hyperuniformes.

L'objectif de ce chapitre est ainsi de caractériser les structures hyperuniformes, notamment à travers l'étude des fluctuations de densité et leur lien avec le facteur de structure. Puis une méthode numérique pour la génération de milieux hyperuniformes est proposée. La propagation d'onde dans ces structures sera étudiée ensuite dans le chapitre 5.

## 4.2 Facteur de structure

### Définition et intérêt en cristallographie

L'introduction du facteur de structure est effectuée à partir de l'étude de la propagation d'une onde scalaire en trois dimensions et en régime de diffusion simple dans un milieu constitué de  $N$  diffuseurs ponctuels de polarisabilité  $\alpha(\omega)$ . Le système est éclairé par une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u}$  et d'amplitude  $E^{\text{inc}}$ , le champ  $E_j(\mathbf{r})$  émis par le diffuseur  $j$  en  $\mathbf{r}$  est alors donné par

$$E_j(\mathbf{r}) = \mu_0 \omega^2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega) p_j(\omega), \quad (4.1)$$

où  $\omega = ck_0$  et  $p_j$  est l'amplitude du dipôle  $j$  positionné en  $\mathbf{r}_j$ . En diffusion simple, on a  $p_j = \epsilon_0 \alpha(\omega) E_0(\mathbf{r}_j)$ ,  $E_0(\mathbf{r}_j) = E^{\text{inc}} \exp(ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_j)$  étant l'amplitude du champ incident au point  $\mathbf{r}_j$ .  $G_0$  est la fonction de Green du vide. En trois dimensions pour des ondes scalaires, elle est donnée par

$$G_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r}. \quad (4.2)$$

En champ lointain  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}_j$ , où  $\mathbf{u}_s = \mathbf{r}/r$ , le champ rayonné par le dipôle  $j$  devient

$$E_j(\mathbf{r}) = k_0^2 \alpha(\omega) \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} E^{\text{inc}} \exp[i(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j]. \quad (4.3)$$

Dans l'approximation de la diffusion simple, le champ émis  $E_s(\mathbf{r})$  par les  $N$  diffuseurs en  $\mathbf{r}$  est donc

$$E_s(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \alpha(\omega) \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r} E^{\text{inc}} \sum_{j=1}^N \exp[i(\mathbf{k} - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j]. \quad (4.4)$$

La puissance rayonnée dans un angle solide  $d\Omega$  autour de  $\mathbf{u}_s$  est donc :

$$dP_s(\mathbf{u}_s, \omega) = \frac{N |E^{\text{inc}}|^2 k_0^4 |\alpha(\omega)|^2}{32\pi^2 \mu_0 c} S[k_0(\mathbf{u}_s - \mathbf{u})] d\Omega, \quad (4.5)$$

où  $S(\mathbf{q})$  est le facteur de structure, défini par

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2. \quad (4.6)$$

Le facteur de structure détermine donc la puissance diffusée dans chaque direction par le milieu. Notons que dans le cas de la diffusion vers l'avant ( $k_0 \mathbf{u}_s = \mathbf{k}$  ou  $\mathbf{q} = 0$ ) le facteur de structure est toujours égal à  $N$  quelque soit les positions des points  $\mathbf{r}_j$ . Ceci est dû au fait que dans cette direction les interférences entre les ondes émises par les différents diffuseurs sont toujours constructives. Le facteur de structure au voisinage de zéro ne comporte pas d'information sur le détail microscopique du milieu mais sur la forme de l'objet [75].

Historiquement le facteur de structure a été introduit en cristallographie. Regardons alors de plus près le cas d'un cristal. Les positions  $\mathbf{r}_j$  des motifs du cristal sont données par

$$\mathbf{r} = n_x a_x \mathbf{u}_x + n_y a_y \mathbf{u}_y + n_z a_z \mathbf{u}_z, \quad (4.7)$$

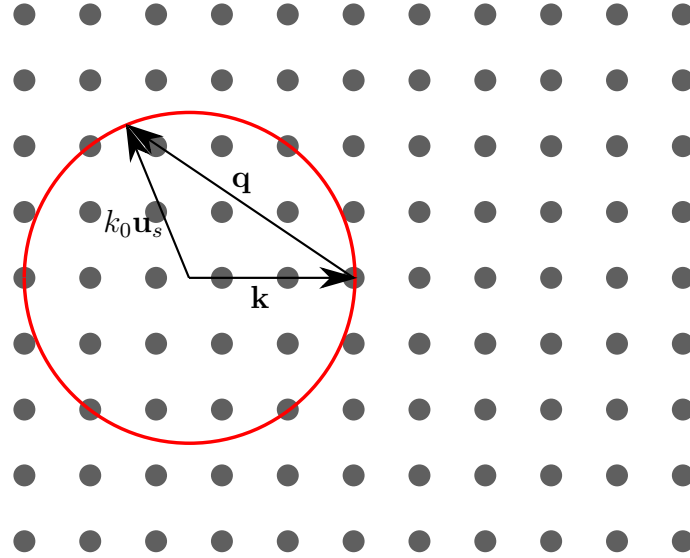
où  $n_x \in [1, N_x]$ ,  $n_y \in [1, N_y]$  et  $n_z \in [1, N_z]$  sont des entiers avec  $N_x N_y N_z = N$ , l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{r}$  constitue le réseau direct. Les vecteurs  $(a_x \mathbf{u}_x, a_y \mathbf{u}_y, a_z \mathbf{u}_z)$  définissent une base de l'espace ainsi que la maille élémentaire du cristal. Le facteur de structure est alors

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin^2(q_x a_x N_x / 2)}{\sin^2(q_x a_x / 2)} \frac{\sin^2(q_y a_y N_y / 2)}{\sin^2(q_y a_y / 2)} \frac{\sin^2(q_z a_z N_z / 2)}{\sin^2(q_z a_z / 2)}. \quad (4.9)$$

Les interférences sont donc constructives dans le cas où  $q_x a_x$ ,  $q_y a_y$  et  $q_z a_z$  sont des multiples de  $2\pi$  et destructives sinon, ce qui permet d'introduire le réseau réciproque. Les vecteurs  $\mathbf{Q}$  du réseau réciproque sont tels que

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = n2\pi, \quad (4.10)$$



**Figure 4.2** – Schéma de la projection de l'intersection entre la sphère d'Ewald et le réseau réciproque dans un plan pour un réseau cristallin carré. La sphère d'Ewald correspond au cercle rouge et le réseau réciproque aux points gris.  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde incident,  $k_0 \mathbf{u}_s$  est le vecteur d'onde diffusé (donnant la direction dans laquelle l'onde est diffusée) et  $\mathbf{q} = k_0(\mathbf{u}_s - \mathbf{u})$ .

où  $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$  et  $n$  un entier. Le réseau réciproque donne l'ensemble des directions pour lesquelles les interférences entre les ondes diffusées par les motifs du cristal sont constructives.

La figure d'interférences d'un cristal éclairé par une onde plane est maintenant déterminée. D'après l'Eq. (4.5) la puissance rayonnée dans la direction  $\mathbf{u}_s$  est donné par le facteur de structure avec comme argument  $\mathbf{q} = k_0 \mathbf{u}_s - \mathbf{k}$ . Lorsque  $\mathbf{u}_s$  explore toute les directions d'espace, la pointe de  $\mathbf{q}$  parcourt une sphère de centre  $-\mathbf{k}$  et de rayon  $k_0$  et l'autre extrémité reste en l'origine. Cette sphère parcourue est la sphère d'Ewald, son intersection avec le réseau réciproque donne la figure d'interférence, c'est-à-dire les directions dans lesquels le cristal transmet l'intensité, ce résultat est illustré sur la Fig. 4.2. Remarquons qu'en ordre de grandeur les points du réseau réciproque sont séparés de  $2\pi/a$ ,  $a$  étant le paramètre de maille ou la distance caractéristique entre deux motifs consécutifs. Dans le cas où  $k_0 < 2\pi/a$ , la sphère d'Ewald ne rencontre aucun point du réseau réciproque et l'onde incidente n'est pas diffusée, le cristal apparaît alors comme transparent.

La figure d'interférences (appelée cliché de diffraction) est mesurée, généralement en transmission, un exemple est présenté sur la Fig. 4.3. L'analyse de ce cliché permet de déterminer les principales caractéristiques du réseau direct, notamment les vecteurs  $a_x \mathbf{u}_x$ ,  $a_y \mathbf{u}_y$  et  $a_z \mathbf{u}_z$ . Aussi lorsque les motifs sont constitués de plusieurs atomes, des interférences supplémentaires peuvent intervenir, rendant ainsi certains points du cliché plus ou moins brillant. Ceci permet de déterminer totalement la structure du cristal.

### Expression avec la fonction de corrélation de paire

Le cas d'un milieu désordonné est maintenant considéré, les points sont répartis dans un volume  $V$  de taille caractéristique  $L$ . Le facteur de structure moyenné sur les configurations (positions des



**Figure 4.3** – Cliché de diffraction aux rayons X sur un cristal d'alumine (D. Bouchet, Orsay). Les points brillants correspondent aux intersection du réseau réciproque et de la sphère d'Ewald.

points) est donné par

$$\begin{aligned}\langle S(\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{N} \left\langle \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 \right\rangle \\ &= 1 + (N-1) \int_V \int_V \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2,\end{aligned}\quad (4.11)$$

où  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est la probabilité de trouver un point en  $\mathbf{r}_1$  et un autre en  $\mathbf{r}_2$ . Cette probabilité est réécrite avec la fonction de corrélation de paire  $h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  sous la forme

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = P(\mathbf{r}_1)P(\mathbf{r}_2)[1 + h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \quad (4.12)$$

$h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  donnant l'écart à l'indépendance, c'est-à-dire le cas où  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = P(\mathbf{r}_1)P(\mathbf{r}_2) = 1/V^2$ . Le facteur de structure est alors

$$\langle S(\mathbf{q}) \rangle = 1 + \frac{N-1}{V^2} \int_V \int_V \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] [1 + h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (4.13)$$

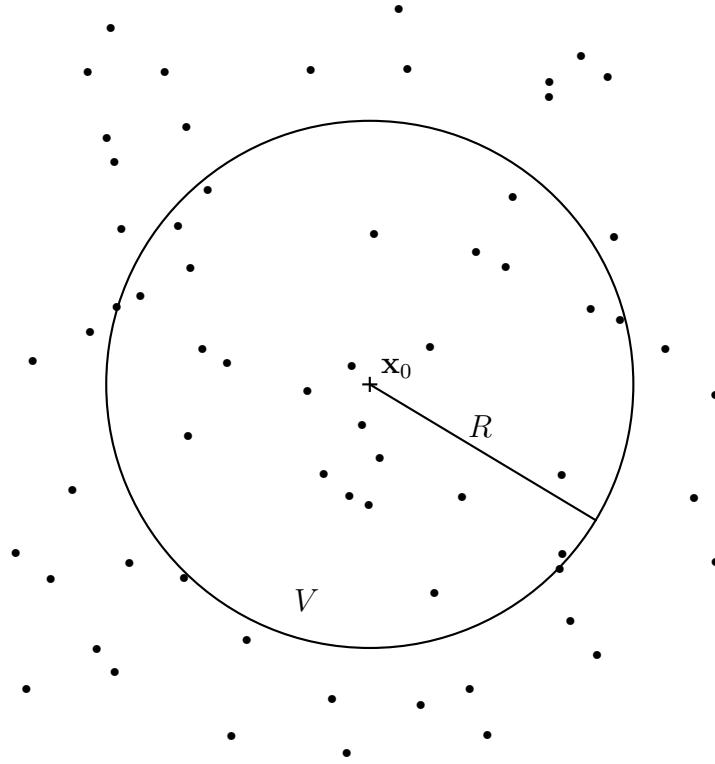
Pour  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll L$  le système peut être considéré comme invariant par translation on a  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = h(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ , le facteur de structure devient

$$\langle S(\mathbf{q}) \rangle = 1 + \frac{N-1}{V} h(\mathbf{q}) + \frac{N-1}{V^2} |\Theta(\mathbf{q})|^2, \quad (4.14)$$

$h(\mathbf{q})$  est la transformée de Fourier de  $h(\mathbf{r})$  et  $\Theta(\mathbf{q})$  est la transformée de Fourier de  $\Theta(\mathbf{r})$  définie comme

$$\Theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

L'expression du facteur de structure donnée par l'Eq. (4.14) n'est valable que pour les grands vecteurs d'onde à cause de la non invariance par translation de la structure aux grandes distances. En particulier pour des vecteurs d'onde de l'ordre de  $2\pi/L$ , l'Eq. (4.14) n'a plus de sens.



**Figure 4.4** – Exemple d'un arrangement de points poissonien en deux dimensions. Le domaine  $V$  est un disque de centre  $\mathbf{x}_0$  et de rayon  $R$ .

## 4.3 Mesure de l'ordre dans un arrangement de points

### 4.3.1 Fluctuations de densités normalisées

Une manière d'aborder les fluctuations de densité [76] est de considérer un arrangement de points et de se donner un domaine  $V$  centré en un point  $\mathbf{x}_0$ , puis de déterminer comment le nombre  $N_V$  de points dans  $V$  évolue avec la taille de  $V$ . Si le système est un cristal, le problème est déterministe et si le système est désordonné, le problème est de nature statistique. Il est alors caractérisé par l'évolution des fluctuations de  $N_V$  avec la taille de  $V$ . Le cas d'un arrangement de points poissonien (sans aucune corrélation entre les positions des points) en deux dimensions est présenté sur la Fig. 4.4, le volume  $V$  est un disque de rayon  $R$  et de centre  $\mathbf{x}_0$ . Dans ce cas on peut montrer que les fluctuations du nombre de points dans  $V$  sont données par

$$\langle N_V^2 \rangle - \langle N_V \rangle^2 = \langle N_V \rangle. \quad (4.16)$$

Or  $\langle N_V \rangle = \rho\pi R^2$  et donc la variance de  $N_V$  évolue en  $R^2$ . Ce cas est toutefois particulier, c'est le cas le plus désordonné possible puisqu'il ne présente aucune corrélation. Par la suite on s'intéresse aux fluctuations normalisées  $F_V$  définies par

$$F_V = \frac{\langle N_V^2 \rangle - \langle N_V \rangle^2}{\langle N_V \rangle}. \quad (4.17)$$

### 4.3.2 Définition d'un arrangement de points hyperuniforme

Les arrangements de points hyperuniformes sont ceux dont les fluctuations normalisées tendent vers zéro quand la taille du domaine  $V$  augmente. Plus précisément, on a

$$\frac{\langle N_V^2 \rangle - \langle N_V \rangle^2}{\langle N_V \rangle} \propto \frac{1}{L}, \quad (4.18)$$

où  $L$  est la taille caractéristique du domaine  $V$  (dans le cas d'une sphère il s'agit de son rayon). Dans ce cas les fluctuations ne sont plus proportionnelles au volume  $V$  comme dans le cas poissonien mais à la surface du domaine délimité par  $V$ . Ce qui signifie que les arrangements de points hyperuniformes présentent des corrélations manifestement assez fortes pour rendre la répartition des points relativement homogène, faisant tendre ainsi les fluctuations normalisées vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini.

Certains arrangements de points bien connus sont hyperuniformes comme les cristaux et quasicristaux. Il s'agit de cas limites où les corrélations sont de longue portée. Cependant certaines structures désordonnées corrélées peuvent être hyperuniformes, la suite de ce chapitre est consacrée à leur étude et à leur caractérisation géométrique. La propagation d'ondes dans ces structures est étudiée dans le chapitre 5. Notons également que de tels milieux sont naturellement présents dans la nature (la rétine du poulet par exemple [77]) et que leur synthèse constitue un nouveau domaine de recherche [72, 78, 79].

### 4.3.3 Lien avec le facteur de structure

Calculer la limite des fluctuations de densité normalisées pour les grands volumes n'est pas aisé à partir d'un système de taille finie, notamment à cause de la non invariance par translation aux grandes distances. Cette limite se détermine beaucoup plus simplement dans le cadre de l'ensemble grand canonique. Dans cet ensemble, un système de volume  $V$  échange des particules avec un système de taille infinie. Il est alors possible de calculer la probabilité  $p(N)$  que  $N$  particules soient présentes dans le volume  $V$ . Dans ce cadre il est possible d'établir un lien entre la fonction de corrélation de paire et les fluctuations normalisées [65] :

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle N_V^2 \rangle - \langle N_V \rangle^2}{\langle N_V \rangle} = 1 + \rho \int h(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.19)$$

Notons que dans l'Eq. (4.19) l'hypothèse d'invariance par translation est légitime pour  $h(\mathbf{r})$  car le calcul est effectué dans un système de taille infinie. En prenant la limite  $V \rightarrow \infty$  dans l'Eq. (4.14) on obtient

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \rho h(\mathbf{k}) + \rho \delta(\mathbf{k}). \quad (4.20)$$

Le membre de droite de l'Eq. (4.19) correspond à un facteur de structure corrigé  $\langle S_{\text{corr}}^{\text{inf}} \rangle(\mathbf{k})$  défini comme

$$\langle S_{\text{corr}}^{\text{inf}} \rangle(\mathbf{k}) = 1 + \rho h(\mathbf{k}), \quad (4.21)$$

la correction étant  $-\rho \delta(\mathbf{k})$ . Le lien entre les fluctuations normalisées et le facteur de structure est ainsi établi

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle N_V^2 \rangle - \langle N_V \rangle^2}{\langle N_V \rangle} = \langle S_{\text{corr}}^{\text{inf}} \rangle(0). \quad (4.22)$$



Pour un arrangement infini hyperuniform de points, le facteur de structure [défini alors dans l'Eq. (4.21)] tend vers zéro pour  $|\mathbf{k}|$  tendant vers zéro [76]. La définition pour les arrangements finis est légèrement différente, car en zéro le facteur de structure correspondant ne peut être défini avec la fonction de corrélation de paire, comme expliqué dans la sous-partie 4.2. Les arrangements de points finis sont hyperuniformes si le facteur de structure tend vers zéro pour  $|\mathbf{k}|$  tendant vers zéro, en excluant  $|\mathbf{k}| < 2\pi/L$ . Dans la suite c'est cette définition qui est utilisée.

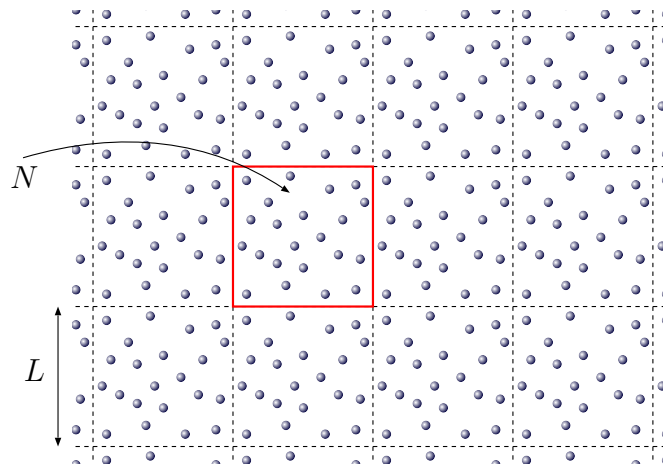
Le facteur de structure dépendant des positions des points, imposer une condition particulière sur sa valeur revient à introduire des contraintes entre les positions des points de l'arrangement. Les positions vont donc vérifier des relations particulières et ainsi présenter des corrélations. Le niveau et l'allure des corrélations dans un milieu hyperuniforme vont dépendre de la façon dont le facteur de structure tend vers zéro [80], cette convergence entraînant plus ou moins de contraintes. Par exemple dans le cas des cristaux, le facteur de structure est rigoureusement nul, sauf aux nœuds du réseau réciproque, à cause de la corrélation extrême entre les positions des points. En réduisant la zone où le facteur de structure est nul, des contraintes vont être relâchées et des arrangements moins ordonnés vont être permis, jusqu'à retrouver le cas poissonien lorsque toutes les contraintes auront été enlevées.

## 4.4 Méthode de génération des milieux hyperuniformes

### 4.4.1 Principe de la méthode

Il est possible de concevoir des arrangements de points avec un facteur de structure arbitraire sur un domaine  $\Omega$  du réseau réciproque [68, 80, 81]. La méthode décrite ici est une adaptation de celles existantes [68, 80, 81], elle permet de générer des configurations hyperuniformes en deux dimensions pour lesquelles le facteur de structure est nul sur un domaine  $\Omega$  autour de l'origine  $\mathbf{q} = 0$ . La forme de  $\Omega$  peut être quelconque. Pour des raisons de facilité numérique la forme carrée a été retenue (voir Fig. 4.6).

Numériquement il n'est possible de manipuler qu'un nombre fini de points. C'est pourquoi, afin de se rapprocher le plus possible du milieu infini et d'éviter les effets de taille finie, l'espace est divisé en cellules carrées identiques de taille  $L$  contenant  $N$  points comme le montre la Fig. 4.5. Une de ces cellules correspond à la structure finie que l'on considère dans la suite.



**Figure 4.5** – Schéma du système périodique. Chaque cellule carrée de taille  $L$  contient  $N$  points.

Le facteur de structure du système périodique est donné par

$$S_{\text{tot}}(\mathbf{q}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2R+1)^2} \frac{1}{N} \left| \sum_{n_x, n_y=-R}^R \sum_{j=1}^N \exp[i\mathbf{q} \cdot (n_x L \mathbf{u}_x + n_y L \mathbf{u}_y + \mathbf{r}_j)] \right|^2, \quad (4.23)$$

$\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  étant les vecteurs unitaires dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. En notant  $S(\mathbf{q})$  le facteur de structure d'une cellule :

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2, \quad (4.24)$$

le facteur de structure total peut se réécrire sous la forme

$$S_{\text{tot}}(\mathbf{q}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2R+1)^2} \left| \frac{\sin[(R+1/2)q_x L]}{\sin(q_x L/2)} \right|^2 \left| \frac{\sin[(R+1/2)q_y L]}{\sin(q_y L/2)} \right|^2 S(\mathbf{q}), \quad (4.25)$$

Le facteur de structure du système périodique  $S_{\text{tot}}$  est donc nul sur tout le réseau réciproque sauf aux points de coordonnées  $(n_x 2\pi/L, n_y 2\pi/L)$  avec  $n_x$  et  $n_y$  dans  $\mathbb{Z}$ , ils constituent donc les seuls points d'intérêts pour la suite. Notons que le facteur de structure d'une cellule est fixe à l'origine et vaut  $N$  quelque soit la configuration du désordre. Donc pour que le facteur de structure soit nul sur  $\Omega$  il faut arranger les points de manière à avoir

$$\left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 = 0, \quad (4.26)$$

pour tout vecteur  $\mathbf{k}' = (n_x 2\pi/L, n_y 2\pi/L)$  de  $\Omega$ . Notons

$$B(\mathbf{k}') = \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2, \quad (4.27)$$

il est intéressant de remarquer que  $B(\mathbf{k}')$  est une quantité toujours positive ou nulle, donc pour annuler le facteur de structure sur  $\Omega$ ,  $B(\mathbf{k}')$  doit atteindre son minimum global (c'est-à-dire zéro) pour chaque  $\mathbf{k}'$  de  $\Omega$ . La méthode la plus simple pour obtenir ce résultat consiste à définir une fonction  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  par [68, 80]

$$\Phi(\{\mathbf{r}_j\}) = \sum_{\mathbf{k}' \in \Omega} B(\mathbf{k}'). \quad (4.28)$$

Ainsi  $\Phi$  atteint son minimum global dans le cas où  $B(\mathbf{k}')$  est minimum pour tout  $\mathbf{k}'$  appartenant à  $\Omega$ . Dans la pratique pour obtenir un milieu hyperuniforme, la fonction  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  est minimisée avec un algorithme de type gradient conjugué avec comme point de départ une configuration non corrélée tirée au hasard. Lorsque le minimum global de  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  est atteint,  $B(\mathbf{k}')$  est nul pour tout  $\mathbf{k}'$  de  $\Omega$ , sauf en zéro où  $B(0)$  est toujours égal à  $N^2$ .

## Quantification de l'ordre local

Il est possible de définir le nombre de degrés de liberté manipulables, celui-ci est fini. En effet, chaque point étant repéré par deux coordonnées, il y a donc  $2N$  degrés de liberté. Un taux de contrainte apparait donc naturellement entre le nombre de contraintes introduites pour obtenir le facteur de structure désiré et le nombre de degrés de liberté donnant le nombre maximal de contraintes possibles. Ce taux est noté  $\chi$  et est défini par [68]

$$\chi = \frac{M(\Omega)}{2N}, \quad (4.29)$$

où  $M(\Omega)$  désigne le nombre de vecteurs indépendants non nuls dans  $\Omega$  (voir Fig. 4.6).  $\chi$  permet de caractériser l'ordre dans l'arrangement. En effet pour  $\chi$  proche de zéro la structure apparaîtra comme désordonnée (car faiblement contrainte) et pour  $\chi$  proche de un la structure apparaîtra comme très ordonnée (car très contrainte).

Le lien entre  $\Omega$  et  $\chi$  est maintenant établi. Comme  $B(\mathbf{k}') = B(-\mathbf{k}')$ , dès que  $B(\mathbf{k}')$  atteint son minimum  $B(-\mathbf{k}')$  l'atteint aussi. Si  $C(\Omega)$  est le nombre de vecteurs  $\mathbf{k}'$  dans  $\Omega$ , le lien entre  $C(\Omega)$  et  $M(\Omega)$  est donné par

$$C(\Omega) = 2M(\Omega) + 1. \quad (4.30)$$

Or  $C(\Omega)$  se calcule simplement car  $\Omega$  est un carré de côté  $K$  :

$$C(\Omega) = E \left[ \frac{K^2}{(2\pi/L)^2} \right], \quad (4.31)$$

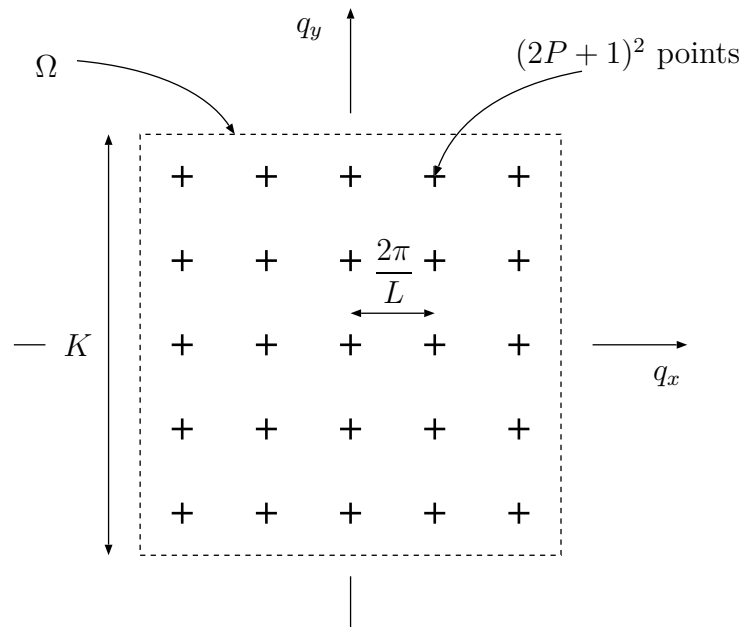
où  $E[x]$  désigne la partie entière de  $x$ , c'est le plus grand entier inférieur à  $x$ . Avec  $M(\Omega) = 2\chi N$ , l'expression de  $K$  est obtenue, ce dernier est tel que :

$$\frac{2\pi}{L} \sqrt{4\chi N + 1} \leq K < \frac{2\pi}{L} \sqrt{2(2\chi N + 1)}, \quad (4.32)$$

dans la suite on choisit  $K = 2\pi/L \sqrt{4\chi N + 1}$ .

Le calcul analytique de  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  est désormais possible. La Fig. 4.6 reprend les éléments présentés précédemment, en définissant

$$P = E \left[ \frac{K/2}{2\pi/L} \right] \text{ et } C(\Omega) = (2P + 1)^2. \quad (4.33)$$



**Figure 4.6** – Ensemble  $\Omega$  de l'espace réciproque pour lequel le facteur de structure est nul.  $\Omega$  est un carré de côté  $K$ . Les vecteurs  $\mathbf{k}' = (n_x 2\pi/L, n_y 2\pi/L)$  sont représentés par des croix. Le nombre de vecteurs  $\mathbf{k}'$  dans  $\Omega$  est  $C(\Omega) = (2P + 1)^2$ .

L'expression de  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  devient :

$$\Phi(\{\mathbf{r}_j\}) = \sum_{n_x=-P}^P \sum_{n_y=-P}^P B(n_x 2\pi/L \mathbf{u}_x + n_y 2\pi/L \mathbf{u}_y), \quad (4.34)$$

en injectant l'expression de  $B(\mathbf{k}')$  de l'Eq. (4.27) l'expression analytique de  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  est finalement obtenue :

$$\Phi(\{\mathbf{r}_j\}) = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\sin[2\pi(P + 1/2)(x_j - x_l)/L]}{\sin[\pi(x_j - x_l)/L]} \frac{\sin[2\pi(P + 1/2)(y_j - y_l)/L]}{\sin[\pi(y_j - y_l)/L]}. \quad (4.35)$$

Cette dernière expression de  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  peut également s'interpréter comme une énergie potentielle résultant d'un potentiel de paire  $v(\mathbf{r})$  défini par

$$v(\mathbf{r}) = \frac{\sin[2\pi(P + 1/2)x/L]}{\sin[\pi x/L]} \frac{\sin[2\pi(P + 1/2)y/L]}{\sin[\pi y/L]}. \quad (4.36)$$

Il est à remarquer que la méthode de génération est valable pour n'importe quel  $\Omega$  et que  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  peut être choisi différemment pour obtenir un facteur de structure arbitraire, par exemple en définissant  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  de la façon suivante :

$$\Phi(\{\mathbf{r}_j\}) = \sum_{\mathbf{k}' \in \Omega} (S(\mathbf{k}', \{\mathbf{r}_j\}) - T(\mathbf{k}'))^2, \quad (4.37)$$

$T(\mathbf{k}')$  étant la consigne, c'est-à-dire la valeur souhaitée pour le facteur de structure en  $\mathbf{k}'$ , librement choisie entre zéro et  $N$ . Dans ce cas  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  sera minimum dans le cas où le facteur de structure sera égal à  $T(\mathbf{k}')$  pour chaque vecteur  $\mathbf{k}'$  de  $\Omega$ . Aussi cette méthode se généralise en dimension  $d$  quelconque mais finie.

#### 4.4.2 Génération numérique de structures hyperuniformes

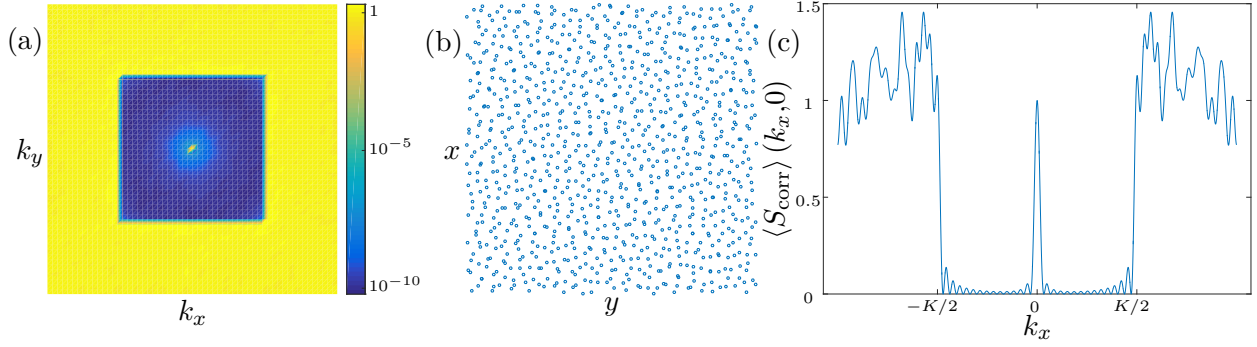
Pour rendre la présentation des résultats numériques plus lisible, un facteur de structure corrigé  $\langle S_{\text{corr}} \rangle(\mathbf{q})$  est défini,

$$\langle S_{\text{corr}} \rangle(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 - \frac{N-1}{V^2} |\Theta(\mathbf{q})|^2. \quad (4.38)$$

Il est possible de définir d'autres corrections pour le facteur de structure, la motivation pour le choix de l'Eq. (4.38) deviendra claire dans la section 5.4 du chapitre 5.

Dans les calculs numériques, la taille  $L$  du système est adimensionnée et prise égale à un. Pour obtenir des configurations de taille  $L$  quelconque, il suffit de multiplier par  $L$  les coordonnées des points des configurations obtenues. La Fig. 4.7 présente les résultats pour une cellule avec  $\chi = 0.22$  et  $N = 1000$  moyennés sur 59 configurations. Comme le montre la Fig. 4.7(a) le facteur de structure corrigé est nul, la valeur résiduelle étant due à la convergence de l'algorithme, sur les vecteurs  $\mathbf{k}' = (n_x 2\pi/L, n_x 2\pi/L)$  du carré  $\Omega$ .

La Fig. 4.7(b) montre une des configurations générées, le milieu est désordonné mais un ordre partiel se distingue avec les corrélations. Sur la Fig. 4.7(c) est tracée une coupe du facteur de structure corrigé, c'est-à-dire  $\langle S_{\text{corr}} \rangle(k_x, 0)$  pour  $k_x$  allant de  $-K$  à  $K$ . Entre les multiples de  $2\pi/L$  le facteur de structure corrigé n'est pas nul, ce qui est attendu car l'optimisation n'est pas faite pour les vecteurs non multiples de  $2\pi/L$ . Néanmoins le facteur de structure y est tout de même plus petit que un, l'optimisation affecte donc tout de même ces vecteurs, sachant que de toute manière en ces points le facteur de structure total est nul.



**Figure 4.7** – Résultats avec  $L = 1$ ,  $N = 1000$  et  $\chi = 0.22$  moyennés sur 59 configurations. (a) Carte du facteur de structure corrigé tracée pour les vecteurs  $\mathbf{k}' = \frac{2\pi}{L}n_x\mathbf{u}_x + \frac{2\pi}{L}n_y\mathbf{u}_y$ . (b) Exemple de configuration générée. (c) Coupe selon la droite  $(k_x, 0)$ .

Afin de montrer comment le paramètre  $\chi$  affecte l'ordre dans l'arrangement de points, des exemples de configurations correspondant à différents  $\chi$  sont représentés sur la Fig. 4.8. La minimisation est très efficace pour  $\chi$  allant de 0 à 0.7,  $\Phi(\{\mathbf{r}_j\})$  atteint son minimum global. À partir de  $\chi = 0.75$  ce n'est plus le cas (d'où la présence de lacunes), ce ne sont toutefois pas les configurations les plus intéressantes car elles sont très ordonnées et quasi-périodiques. La Fig. 4.8 montre bien que lorsque  $\chi$  augmente, l'ordre dans la structure devient plus important. Le paramètre  $\chi$  permet donc effectivement de contrôler le niveau des corrélations dans les arrangements de points hyperuniformes.

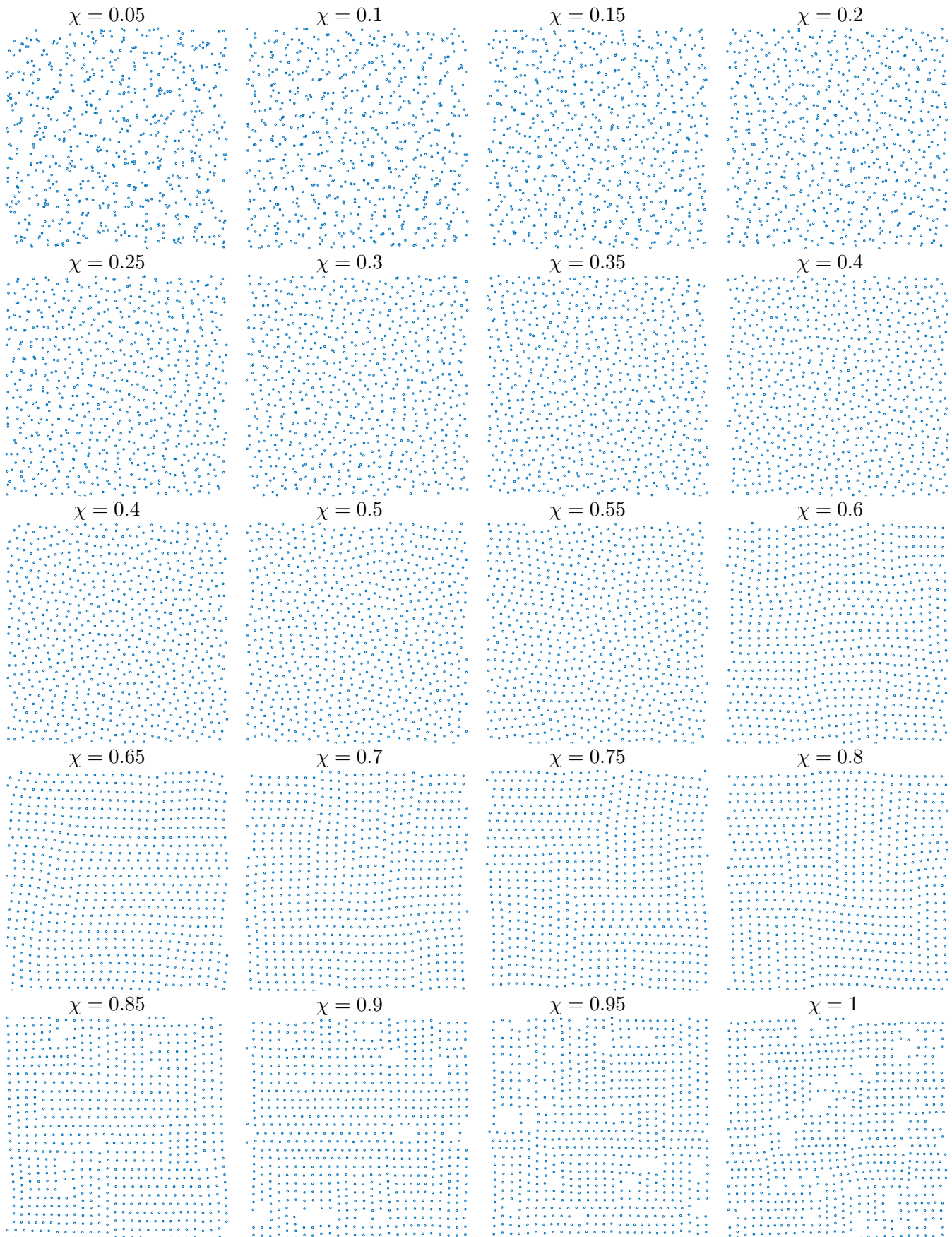
#### 4.4.3 Robustesse des configurations

Il est utile d'évaluer la robustesse des configurations en vue d'éventuels travaux expérimentaux, pour lesquels les positions des constituants ne pourront pas être parfaitement contrôlées. Cette étude est effectuée sur 20 configurations avec  $\chi = 0.22$ ,  $N = 90000$  et  $L = 1$ . La Fig. 4.9 présente les coupes du facteur de structure corrigé pour différents niveaux de perturbations des configurations. Les perturbations consistent à ajouter à chacune des coordonnées des points une quantité :  $\varsigma \langle d \rangle$ , où  $\varsigma$  est un nombre aléatoire dans  $[-\delta, \delta]$  et  $\langle d \rangle$  est la distance moyenne entre deux points,  $\delta$  indique le niveau des perturbations, il est compris entre 0 et 0.5.

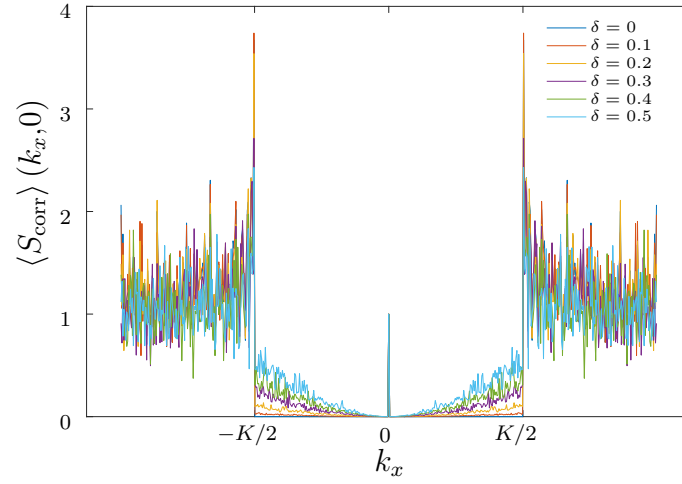
Les vecteurs d'onde les moins affectés sont les plus petits. Ils correspondent aux grandes longueurs d'onde, grandes en particulier devant  $\langle d \rangle$ , de cette manière une perturbation de la position des points de l'ordre de  $\langle d \rangle$  change peu la valeur du facteur de structure. À l'inverse lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de  $\langle d \rangle$  (ou  $k \sim K/2$ , car  $K \sim 2\pi/\langle d \rangle$ ), le facteur de structure change beaucoup avec une perturbation des positions des points de l'ordre de  $\langle d \rangle$ . L'analyse de la Fig. 4.9 recommande de prendre  $\langle d \rangle$  petit devant la longueur d'onde dans les applications pratiques, autrement le système risque d'être trop sensible aux imperfections.

## 4.5 Conclusion

En résumé de ce chapitre, les arrangements de points hyperuniformes ont été exposés. Pour ces arrangements, les fluctuations de densité au sein d'un volume  $V$  tendent vers zéro lorsque la taille de celui-ci tend vers l'infini. De manière équivalente le facteur de structure de ces arrangements tend vers zéro pour les vecteurs d'onde tendant vers zéro. Dans ces arrangements, les positions des points sont corrélés. Plusieurs niveaux d'ordre sont possibles, allant du cristal au milieu faiblement corrélés. Une méthode de génération d'une classe particulière de milieu hyperuniforme a été proposée, celle-ci



**Figure 4.8** – Exemples de configurations de 700 points pour  $\chi$  entre 0.05 et 1. Pour les configurations correspondant à  $\chi$  allant de 0.85 à 1 la présence de lacunes est due au fait que la routine de gradient conjugué utilisée n'a pas réussi à converger vers le minimum global de  $\Phi$



**Figure 4.9** – Coupe du facteur de structure corrigé pour des configurations perturbées (coordonnées des positions des points changées de  $\varsigma\langle d \rangle$ ,  $\varsigma$  variant entre  $-\delta$  et  $\delta$ ) pour  $k_x = 2\pi n_x/L$ ,  $N = 90000$  et  $\chi = 0.22$ .

génère des arrangements pour lesquels le facteur de structure est nul sur un domaine  $\Omega$  du réseau réciproque. Dans le chapitre 5 la propagation des ondes dans ces structures est étudiée.

# Chapitre 5

## Propagation d'ondes dans un milieu hyperuniforme désordonné

### Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>5.2</b>	<b>Système retenu . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>5.3</b>	<b>Étude dans le régime de diffusion simple . . . . .</b>	<b>68</b>
5.3.1	Intensité diffusée, facteur de structure et sphère d'Ewald . . . . .	68
5.3.2	Simulations numériques de l'intensité diffusée . . . . .	69
<b>5.4</b>	<b>Étude dans le régime de diffusion multiple . . . . .</b>	<b>70</b>
5.4.1	Lien entre facteur de structure et fonction de phase . . . . .	70
5.4.2	Condition pour avoir un matériau hyperuniforme transparent . . . . .	72
5.4.3	Résultats numériques . . . . .	73
<b>5.5</b>	<b>Au-delà de l'hyperuniformité . . . . .</b>	<b>74</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>75</b>

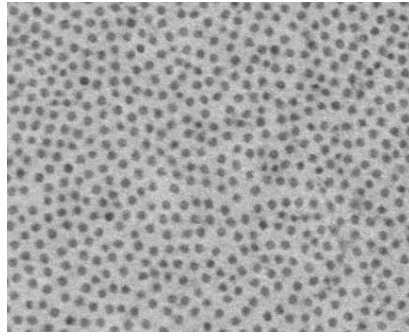
### 5.1 Introduction

Le désordre peut-être considéré comme un obstacle à la propagation des ondes. Une fois que les ondes pénètrent un milieu désordonné, l'image en sortie apparaît brouillée et il est difficile, *a priori*, de retrouver l'image initiale. Ceci laisse penser que l'information, par exemple la direction initiale, est perdue. Cependant la propagation des ondes est déterministe. Sur une figure de speckle, la phase, la polarisation et l'amplitude sont parfaitement déterminées en chaque point. En jouant sur ce déterminisme il est possible de contrôler la propagation des ondes en milieu désordonné.

Le contrôle des ondes en milieu désordonné constitue un enjeu majeur, que ce soit en imagerie [82] ou en astronomie où la correction des déviations introduites par les fluctuations de l'atmosphère est essentiel [83]. Une première possibilité est de contrôler la source. Le contrôle de front d'onde [3] en est un exemple et est l'une des meilleures techniques pour maîtriser la propagation des ondes et surmonter la diffusion multiple. Cette technique permet de focaliser les ondes en n'importe quel endroit de l'espace en introduisant un déphasage entre les excitations des modes du milieu désordonné. Le contrôle des ondes peut également s'effectuer par la modification des conditions de bord, notamment en cavité [84] où le champ peut être focalisé en n'importe quel point via le contrôle d'une métasurface.

Une autre possibilité pour contrôler les ondes est de travailler sur la structure même du milieu désordonné et de la concevoir d'une manière telle qu'elle conduise à des propriétés de propagation





**Figure 5.1** – Image TEM d’un arrangement de fibrilles de collagène dans la cornée humaine (par G. Latour). Bien que non périodique, le système est corrélé à courte portée.

particulières. En effet, la présence d’ordre local ou de corrélations dans la structure désordonnée peut avoir une grande influence sur la propagation des ondes. Les milieux biologiques sont des exemples représentatifs [85], en particulier celui de la cornée [6], qui serait un milieu opaque et d’apparence laiteuse si les positions des fibrilles de collagène qui la composent n’étaient pas corrélées à courte portée (voir Fig. 5.1) de manière à augmenter le libre parcours moyen de la lumière. D’autres grandeurs peuvent être modifiées, par exemple la densité d’état [86, 87], permettant l’apparition de bandes interdites photoniques [88–90], ou des grandeurs caractéristiques pour la localisation d’Anderson, comme la longueur de localisation [91] ou la limite de mobilité (*mobility edge* en anglais) [92].

Les matériaux hyperuniformes, introduits dans le chapitre 4, ont suscité l’intérêt de par leurs propriétés spécifiques. Ils possèdent des bandes interdites photoniques complètes [93, 94] en deux dimensions pour les polarisations TE et TM. Cependant l’explication de l’origine de ces bandes interdites demeure incomplète. Les matériaux hyperuniformes sont aussi intéressants car ils permettent de concevoir des guides d’ondes avec des géométries originales [95] ou de réaliser de cavités optiques à fort facteur de qualité [96]. Toutefois l’essentiel de ces travaux est effectué avec de petits échantillons contenant entre 400 et 500 diffuseurs, et limités aux ondes électromagnétiques. Aussi ces études expérimentales sont associées à des simulations numériques effectuées par différences finies [94, 97], ne permettant pas d’étudier des systèmes très épais.

L’objectif de ce chapitre est d’étudier théoriquement et numériquement les propriétés optiques particulières des milieux hyperuniformes en diffusion simple et multiple à partir d’un formalisme de type transport, et de montrer comment l’introduction d’ordre partiel dans un milieu désordonné peut radicalement changer ses propriétés de transport de la lumière.

## 5.2 Système retenu

Utilisons maintenant les arrangements de points hyperuniformes générés dans le chapitre 4 pour étudier comment les ondes s’y propagent. Les matériaux hyperuniformes sont créés en habillant chaque point de l’arrangement par un diffuseur.

On se place en régime dilué tel que  $k_0 \ell_B \gg 1$  (où  $\ell_B$  est le libre parcours moyen de Boltzmann). On souhaite également étudier des systèmes de grande épaisseur optique  $b_B = L/\ell_B \gg 1$  ( $L$  étant la taille du système). Aussi la distance caractéristique associée aux corrélations dans un milieu hyperuniforme est  $1/K \sim \langle d \rangle$  ( $\langle d \rangle$  est la distance moyenne entre diffuseurs). Pour qu’elles influencent la propagation des ondes il faut  $k_0 \sim 1/\langle d \rangle$ , avec  $k_0 = \omega/c$  le module du vecteur d’onde dans le vide. La légitimité de cette dernière condition est montrée dans la section 5.4. Ces différentes contraintes permettent de déterminer un ordre de grandeur du nombre  $N$  de points nécessaire. Le libre parcours moyen de

Boltzmann  $\ell_B$  est défini comme

$$\ell_B = \frac{1}{\rho\sigma_{\text{sca}}}, \quad (5.1)$$

$\rho = 1/\langle d \rangle^2$  est la densité de diffuseurs (en dimension deux) et  $\sigma_{\text{sca}}$  est la section efficace de diffusion des diffuseurs. Le produit  $k_0\ell_B$  est donné par

$$k_0\ell_B \sim \frac{\langle d \rangle}{\sigma_{\text{sca}}}, \quad (5.2)$$

et l'épaisseur optique par

$$b_B \sim \frac{L\sigma_{\text{sca}}}{\langle d \rangle^2}. \quad (5.3)$$

Or  $N$  est donné par

$$N \sim \left( \frac{L}{\langle d \rangle} \right)^2. \quad (5.4)$$

En rassemblant ces trois dernières équations un ordre de grandeur sur  $N$  est obtenu :

$$N \sim (b_B k_0 \ell_B)^2. \quad (5.5)$$

Pour l'étude numérique  $b_B = 5$  et  $k_0\ell_B = 44$  sont retenus.  $N$  est donc de l'ordre de 50000, par sécurité  $N = 90000$  a finalement été choisi.

Avec la procédure décrite dans le chapitre 4, 20 configurations de  $N = 90000$  points sont générées avec comme taux de contrainte  $\chi = 0.22$ . Sur la Fig. 5.2(a) est présentée une portion d'une des configurations obtenues et sur la Fig. 5.2(b) est présentée la carte du facteur de structure corrigé moyenné sur les 20 configurations. À titre de comparaison, la Fig. 5.2(c) présente une portion d'une configuration non corrélée et la Fig. 5.2(d) la carte du facteur de structure corrigé pour le milieu non corrélé.

L'expérience numérique est présentée sur la Fig. 5.3. Les points des arrangements sont désormais habillés par des tiges dont le rayon est supposé petit devant  $\lambda$  pour qu'elles puissent être traitées dans l'approximation dipolaire. La réponse des tiges à une onde polarisée TE (champ électrique parallèle aux tiges) peut-être représentée par une polarisabilité  $\alpha(\omega)$  donnée par

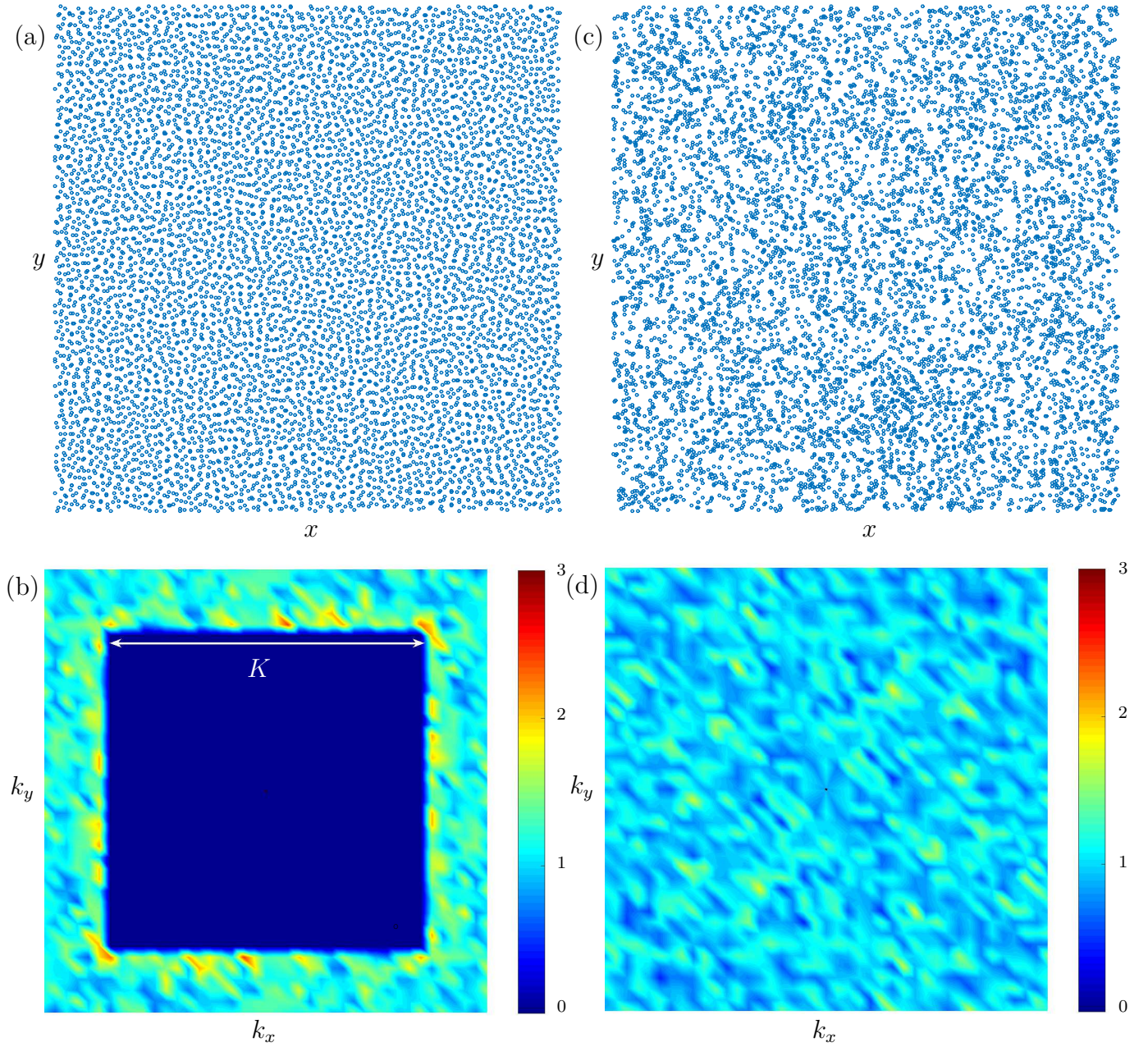
$$\alpha(\omega) = -\frac{4\Gamma c^2}{\omega_0(\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega^2/\omega_0)}. \quad (5.6)$$

Il s'agit d'une polarisabilité d'un oscillateur résonant et non absorbant de fréquence de résonance  $\omega_0$  et de largeur spectrale  $\Gamma$ .  $\omega_0$  et  $\Gamma$  dépendent en réalité des propriétés géométrique et diélectrique des tiges (voir chapitre 2). Le schéma de l'expérience numérique est présenté sur la Fig. 5.3.

Comme dans le chapitre 3, pour s'affranchir des effets de taille finie, le système est illuminé par un faisceau gaussien polarisé TE sous incidence normale et focalisé au centre du système, son expression est donnée par

$$E_0(\mathbf{r}, \omega) = \frac{E_0}{\sqrt{1+ia}} \exp \left[ ik_0 r_{\parallel} - \frac{r_{\perp}^2}{w^2(1+ia)} \right], \quad (5.7)$$

avec  $a = 2r_{\perp}/(kw^2)$ ,  $r_{\parallel}$  étant la composante de  $\mathbf{r}$  selon la direction de propagation,  $r_{\perp}$  la composante transverse. Afin d'approcher autant que possible une onde plane, sa largeur  $w$  est prise grande devant



**Figure 5.2** – (a) Portion d'une configuration hyperuniforme avec  $N = 90000$  points et  $\chi = 0.22$ . (b) Carte du facteur de structure corrigé pour le milieu hyperuniforme moyennée sur 20 configurations. (c) Portion d'une configuration non corrélée avec  $N = 90000$  points et  $\chi = 0$ . (d) Carte du facteur de structure corrigé pour le milieu non corrélé.

la longueur d'onde mais inférieure à la taille du système. De la même manière qu'au chapitre 3, le champ électrique est calculé avec la méthode des dipôles couplés [27], en résolvant le système de  $N$  équations suivant :

$$E_j^{\text{exc}} = E_0(\mathbf{r}_j, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N G_0(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l, \omega) E_l^{\text{exc}}, \quad (5.8)$$

où  $E_j^{\text{exc}}$  est le champ excitateur sur le dipôle  $j$ ,  $E_0(\mathbf{r}_j, \omega)$  le champ de la source sur le dipôle  $j$  et  $G_0(\mathbf{r}, \omega)$  est la fonction de Green 2D scalaire dans le vide, donnée par

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (5.9)$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel d'ordre zéro et de premier type. Le champ électrique peut être calculé à n'importe quelle position de l'espace par la relation

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E_0(\mathbf{r}, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{j=1}^N G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega) E_j^{\text{exc}}. \quad (5.10)$$

Dans la suite, la grandeur étudiée est l'intensité diffusée moyenne, définie par

$$I_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \omega) = \langle |E(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle - |\langle E(\mathbf{r}, \omega) \rangle|^2. \quad (5.11)$$

Afin de manipuler des expressions plus simples, il est intéressant de décomposer le champ électrique de la manière suivante,

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E_0(\mathbf{r}, \omega) + E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (5.12)$$

$E_0(\mathbf{r}, \omega)$  est le champ créé par la source et  $E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega)$  est celui créé par les diffuseurs. L'intensité se réécrit alors

$$I_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \omega) = \langle |E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle - |\langle E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle|^2. \quad (5.13)$$

Ainsi,  $I_{\text{diff}}(\mathbf{r}, \omega)$  se calcule avec la contribution du champ diffusé uniquement. Pour étudier les propriétés de diffusion en champ lointain, il est préférable de travailler avec des grandeurs angulaires plutôt que spatiales. Ceci revient à développer l'expression du champ électrique donnée par l'Eq. (5.10) en champ lointain, sous les conditions  $L \ll r$  et  $L^2/\lambda \ll r$ . On a alors  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_j / r$ . Le développement de  $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega)$  en champ lointain est donné par

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \omega) \approx \frac{i(i-1)}{4\sqrt{\pi k_0 r}} \exp[ik_0(r - i\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_j)], \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ . L'expression de  $E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega)$  en champ lointain est alors

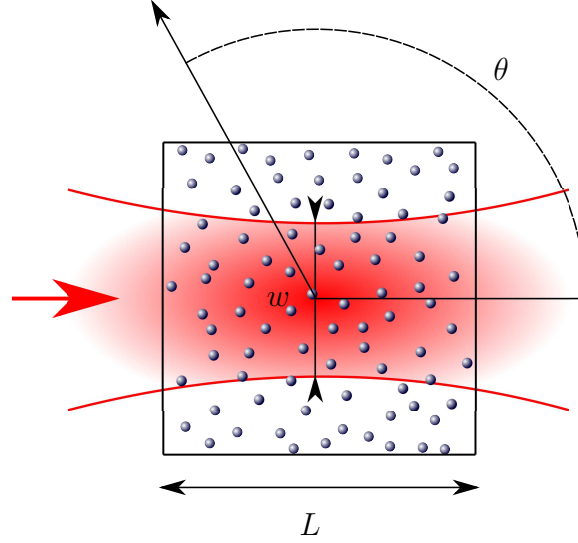
$$E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) \approx \frac{i(i-1)}{4\sqrt{\pi k_0 r}} \exp(ik_0 r) \sum_{j=1}^N \alpha(\omega) k_0^2 \exp(-ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_j) E_j^{\text{exc}}. \quad (5.15)$$

Dans l'expression de  $E_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega)$ , les dépendances radiale et angulaire sont séparées. Comme la partie radiale n'est pas spécifique à la structure, l'étude peut donc se restreindre à  $E_{\text{sca}}(\theta, \omega)$  défini comme

$$E_{\text{sca}}(\theta, \omega) = \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{j=1}^N \exp(-ik_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_j) E_j^{\text{exc}}, \quad (5.16)$$

où  $\theta$  est l'angle repérant la direction de  $\mathbf{u}$ , comme indiqué sur la Fig. 5.3. L'intensité diffusée peut donc se réduire à

$$I_{\text{diff}}(\theta, \omega) = \langle |E_{\text{sca}}(\theta, \omega)|^2 \rangle - |\langle E_{\text{sca}}(\theta, \omega) \rangle|^2. \quad (5.17)$$



**Figure 5.3** – Le système est éclairé par la gauche. L'intensité et le champ moyen angulaires sont calculés dans les directions repérées par l'angle  $\theta$ , compris entre 0 et  $2\pi$ .

## 5.3 Étude dans le régime de diffusion simple

### 5.3.1 Intensité diffusée, facteur de structure et sphère d'Ewald

Pour illustrer les spécificités des milieux hyperuniformes, la propagation des ondes est d'abord étudiée dans le régime de diffusion simple. Ce régime correspond au cas où la taille du système est inférieure au libre parcours moyen de Boltzmann  $\ell_B(\omega)$  calculé dans le cas non corrélé. L'épaisseur optique vérifie donc  $b_B(\omega) = L/\ell_B < 1$ . Dans ce cas on peut approximer le champ excitateur s'appliquant sur chacun des diffuseurs par le champ incident. L'intensité diffusée se calcule simplement et s'écrit

$$I_{\text{diff}}(\theta, \omega) = \left\langle \left| \sum_{j=1}^N \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] \right|^2 \right\rangle E_0^2 - \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] \right\rangle \right|^2 E_0^2. \quad (5.18)$$

Le premier terme est proportionnel au facteur de structure, le second peut se réécrire de manière plus explicite :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] \right\rangle \right|^2 &= \left| \sum_{j=1}^N \langle \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \int \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] P(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} \right|^2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

où  $P(\mathbf{r}) = 1/V$  donne la probabilité de trouver un diffuseur en  $\mathbf{r}$ ,

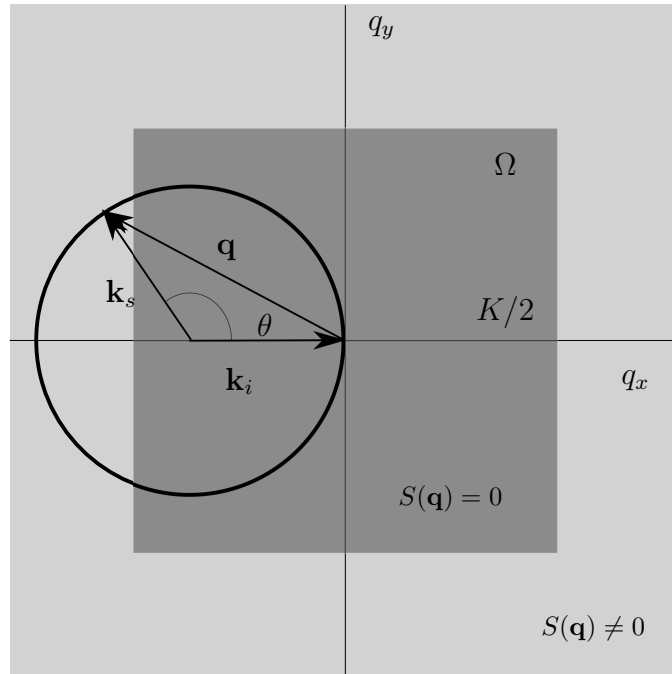
$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{j=1}^N \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}_j] \right\rangle \right|^2 &= \frac{N^2}{V^2} \left| \int \exp[i(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{r}] \right|^2 \\ &= |\Theta(k_0 \mathbf{u}_i - k_0 \mathbf{u}_s)|^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

où  $\Theta(\mathbf{k})$  a été introduite avec l'Eq. (4.14). Finalement, dans le régime de diffusion simple l'intensité diffusée est donnée par :

$$I_{\text{diff}}(\theta, \omega) \propto N \langle S[k_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s)] \rangle - \frac{N^2}{V^2} |\Theta[k_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s)]|^2, \quad (5.21)$$

où  $\mathbf{u}_i$  est le vecteur unitaire donnant la direction de propagation de l'onde incidente et  $\mathbf{u}_s$ , repéré par  $\theta$ , définit la direction de diffusion. En régime de diffusion simple, l'intensité diffusée est donc proportionnelle au facteur de structure (multiplié par  $N$ ) corrigé du terme  $N^2/V^2 |\Theta(\mathbf{k})|^2$ . Cette correction tend vers zéro pour les angles  $\theta \neq 0$  quand la taille du système tend vers l'infini et vaut  $N^2$  en  $\theta = 0$ . Cela revient à retrancher la diffusion vers l'avant de l'intensité totale.

Il est intéressant de noter que le diagramme d'intensité diffusée peut être déterminé directement à partir de la carte du facteur de structure. L'intensité diffusée dans la direction  $\mathbf{u}_s$  est donnée par le facteur de structure avec comme argument  $\mathbf{q} = k_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s) = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$ . Quand  $\theta$  parcourt l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , la pointe du vecteur  $\mathbf{q}$  parcourt un cercle de rayon  $k_0$  et centré en  $-\mathbf{k}_i$ , comme le montre la Fig. 5.4, ce cercle correspond à la sphère d'Ewald utilisée en cristallographie (ici en dimension deux).



**Figure 5.4** – Schéma montrant l'évolution du vecteur  $\mathbf{q} = k_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_s) = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$  avec  $\theta$  dans la carte de facteur de structure d'un milieu hyperuniforme. Pour  $k_0 < K/4$  l'intensité diffusée est nulle et pour  $k_0 > K/4$  l'intensité est diffusée dans les directions  $\theta$  pour lesquels  $S(\mathbf{q})$  est non nul.

Pour les milieux hyperuniformes, il y a deux cas à considérer :

- le cercle d'Ewald reste dans le carré  $\Omega$  où le facteur de structure est nul, l'intensité diffusée est alors nulle dans toutes les directions,
- le cercle d'Ewald sort de ce carré, la diffusion s'effectue alors essentiellement vers l'arrière.

### 5.3.2 Simulations numériques de l'intensité diffusée

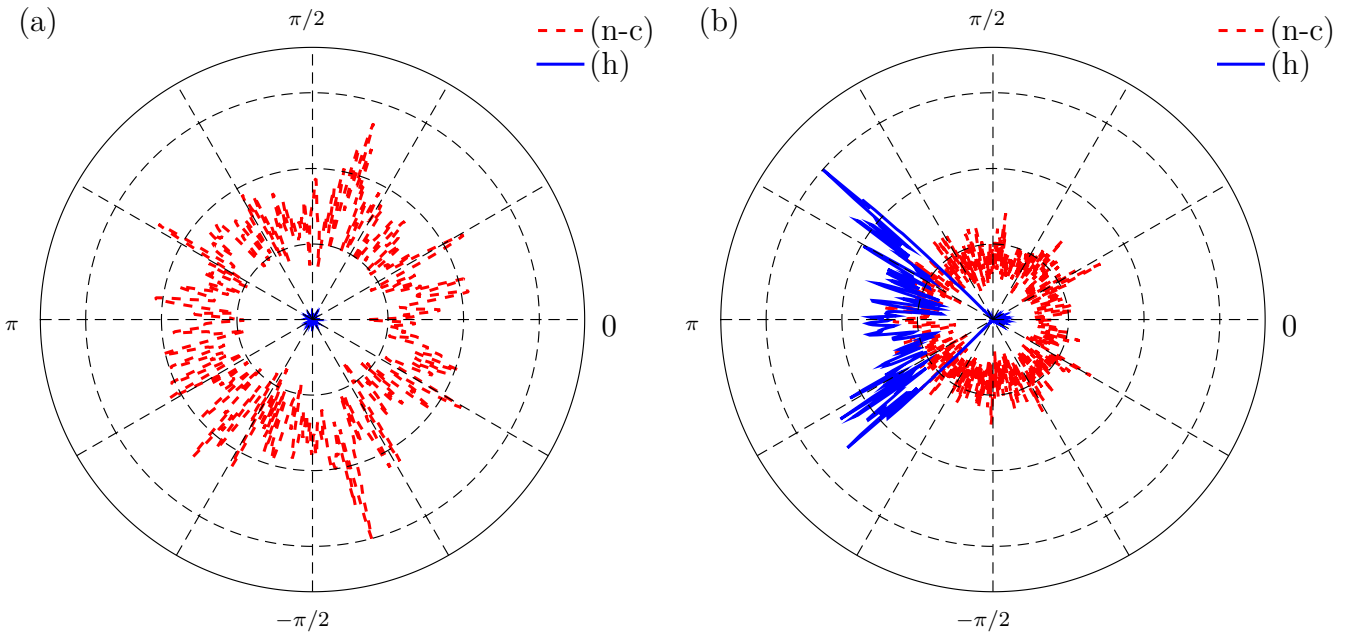
Les résultats des simulations numériques correspondants aux deux cas évoqués précédemment sont présentés sur la Fig. 5.5. À titre de comparaison, l'intensité diffusée est aussi calculée pour des systèmes non corrélés, de mêmes taille et densité. La Fig. 5.5(a) correspond au cas où le cercle d'Ewald

est inscrit dans le carré  $\Omega$ , sous la condition  $K = 8k_0$ . Comme établi dans la partie précédente, pour les configurations hyperuniformes (tracé continu bleu), l'intensité diffusée est quasiment nulle, en tout cas bien plus faible que pour les configurations non corrélées (tracé pointillé rouge). Ce résultat est important car il montre qu'un matériau désordonné peut avoir les mêmes propriétés, ici la transparence, qu'un cristal (comme montré dans le chapitre 4) du fait de la présence d'ordre local.

La Fig. 5.5(b) montre le cas où le cercle d'Ewald sort du carré  $\Omega$ , sous la condition  $K = 3.5k_0$ . En accord avec la Fig. 5.4 la diffusion apparaît pour un angle critique  $\theta_c$  lorsque le vecteur  $\mathbf{q}$  sort de  $\Omega$ . Cet angle se calcule aisément :

$$\theta_{\text{lim}} = \arccos \left[ 1 - \frac{K}{2k_0} \right]. \quad (5.22)$$

Pour le cas  $K = 3.5k_0$ , l'angle  $\theta_{\text{lim}}$  calculé vaut  $138^\circ$ , en bon accord avec la valeur numérique  $\theta_{\text{lim}} = 134^\circ$ . L'écart entre les deux valeurs théoriques et numériques est dû au fait que le facteur de structure n'est pas nul pour des vecteurs de  $\Omega$  proches des bords comme montré dans la Fig. 5.2(b). Numériquement la diffusion apparaît donc pour un angle inférieur à l'angle calculé théoriquement.



**Figure 5.5** – (a) Diagramme de l'intensité diffusée pour  $K = 8k_0$ ,  $k_0\ell_B = 444$  et  $b_B = 0.5$ . (b) Diagramme de l'intensité diffusée pour  $K = 3.5k_0$ ,  $k_0\ell_B = 1015$  et  $b_B = 0.5$ . Pour les deux cas  $k_0w = 60$ . (n-c) Résultats pour les configurations non corrélées, (h) Résultats pour les configurations hyperuniformes.

## 5.4 Étude dans le régime de diffusion multiple

### 5.4.1 Lien entre facteur de structure et fonction de phase

Les matériaux hyperuniformes présentent donc des propriétés originales en régime de diffusion simple. Cette section vise à montrer dans quelle mesure elles persistent en régime diffusion multiple.

Comme montré dans le chapitre 2, dans les milieux dilués en régime de diffusion multiple, la propagation des ondes est décrite par l'ETR. Dans cette équation intervient la fonction de phase, qui

détermine la façon dont se répartit angulairement l'intensité lumineuse pour un événement de diffusion. Dans un milieu corrélé, elle peut se calculer facilement de manière intuitive à partir du calcul de l'intensité rayonnée en régime de diffusion simple pour un éclairage par une onde plane polarisée TE [98].

En deux dimensions, la fonction de phase s'exprime aussi avec le vertex intensité  $\tilde{\Gamma}$  (voir chapitre 2) selon

$$p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{\tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u})}{4k_r \mu_{\text{sca}}}. \quad (5.23)$$

où  $k_r = \sqrt{\Re(k_{\text{eff}}^2)}$ .  $\tilde{\Gamma}$  peut s'approximer en premier ordre en densité [98, 99]

$$\tilde{\Gamma} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array}. \quad (5.24)$$

Dans le chapitre 4, il a été montré à l'Eq. (4.14) que le facteur de structure se décompose sous la forme :

$$S(\mathbf{q}) = 1 + \rho h(\mathbf{q}) + \frac{N-1}{V^2} |\Theta(\mathbf{q})|^2. \quad (5.25)$$

Le facteur de structure moyenné peut ainsi s'interpréter également à l'aide de diagrammes :

$$\langle S \rangle = \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array}. \quad (5.26)$$

Le premier terme correspond à l'intensité produite par deux champs diffusés par le même diffuseur, le second correspond à deux diffuseurs différents et corrélés, enfin le troisième terme implique diffuseurs différents et non corrélés.

En soustrayant le troisième terme du facteur de structure, les expressions de  $\tilde{\Gamma}$  et du facteur de structure sont égales à un préfacteur près. L'expression du facteur de structure corrigé  $\langle S_{\text{corr}} \rangle$  est alors

$$\langle S_{\text{corr}} \rangle(\mathbf{q}) = 1 + \rho h(\mathbf{q}), \quad (5.27)$$

ou encore

$$\langle S_{\text{corr}} \rangle(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j) \right|^2 - \frac{N-1}{V^2} |\Theta(\mathbf{q})|^2. \quad (5.28)$$

Par souci de cohérence, c'est cette correction qui avait été choisie pour présenter les résultats géométriques dans le chapitre 4. Remarquons qu'en zéro, comme le facteur de structure vaut  $N$  quelque soit la configuration, le facteur de structure corrigé vaut toujours un. Ceci a des conséquences pour la fonction de phase, qui dans la direction d'incidence est toujours non nulle.

La fonction de phase est alors reliée au facteur de structure par

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{\rho |\alpha(\omega)|^2 k_0^4}{4k_r \mu_{\text{sca}}} \langle S_{\text{corr}} \rangle[k_r(\mathbf{u} - \mathbf{u}')]. \quad (5.29)$$



Pour un milieu dilué, on peut faire l'approximation :  $k_r \sim k_0$ , la fonction de phase est alors

$$p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{\rho |\alpha(\omega)|^2 k_0^3}{4\mu_{\text{sca}}} \langle S_{\text{corr}} \rangle [k_0(\mathbf{u} - \mathbf{u}')]. \quad (5.30)$$

De même, la définition générale du libre parcours moyen  $\ell_{\text{sca}}$  en dimension deux est donnée par

$$\frac{1}{\ell_{\text{sca}}} = \frac{1}{8\pi k_r} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}') d\Omega, \quad (5.31)$$

et s'exprime, en régime dilué, avec le facteur de structure comme

$$\frac{1}{\ell_{\text{sca}}} = \frac{\rho |\alpha(\omega)|^2 k_0^3}{4} \int \langle S_{\text{corr}} \rangle [k_0(\mathbf{u} - \mathbf{u}')] d\Omega. \quad (5.32)$$

### 5.4.2 Condition pour avoir un matériau hyperuniforme transparent

Les Eq. (5.30) et Eq. (5.32) montrent que la fonction de phase et le libre parcours moyen sont proportionnels au facteur de structure corrigé. Le cas des milieux hyperuniformes tels que  $K > 4k_0$  semble donc particulièrement intéressant car il apparait comme un cas pathologique où la fonction de phase est nulle et le libre parcours moyen tend vers l'infini, aux effets de taille finie près. Dans ces conditions, les milieux hyperuniformes sont transparent. Seulement, pour obtenir ce résultat le vertex intensité a été approximé. La transparence n'est donc observée que si  $\tilde{\Gamma}$  peut être approximé avec le facteur de structure, l'objectif de cette section est de déterminer le cadre de validité de cette approximation.

D'une manière générale, dans un milieu désordonné  $\tilde{\Gamma}$  est donné par (en se limitant aux premiers digrammes en corrélations voir chapitre 2) :

$$\tilde{\Gamma} = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array}. \quad (5.33)$$

Dans les milieux hyperuniformes les deux premiers termes de  $\Gamma$  se compensent. À l'ordre le plus bas, l'expression de  $\Gamma$  devient donc

$$\Gamma = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array}. \quad (5.34)$$

Ainsi lorsque le facteur de structure est nul, le libre parcours moyen n'est pas infini. Dans ce cas le libre parcours moyen se calcule (voir l'Eq. (2.82)) selon

$$\frac{1}{\ell_{\text{sca}}} = \frac{N(N-1)}{V^2} k_0^5 |\alpha(\omega)|^2 \int_0^\infty \Re[\alpha(\omega) G_0(r)] h(r) J_0(k_0 r) r dr, \quad (5.35)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro et  $k_r$  est approximé par  $k_0$ . Un ordre de grandeur du libre parcours moyen donné par l'Eq. (5.35) peut s'obtenir en calculant la self-energy  $\Sigma$  de l'équation de Dyson. Le développement à l'ordre le plus bas en  $[k_0 \ell_B]^{-1}$  donne (voir chapitre 2)

$$\Sigma = \text{---} \circ \text{---} + \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \quad (5.36)$$

Cette expression de  $\Sigma$  se calcule dans l'espace de Fourier avec l'approximation *on-shell*  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{u}$ ,

$$\Sigma(k_0) = \frac{N}{V} k_0^2 \alpha(\omega) \left[ 1 + \frac{2\pi(N-1)}{V} k_0^2 \alpha(\omega) \int_0^\infty G_0(r) h(r) J_0(k_0 r) r dr \right], \quad (5.37)$$

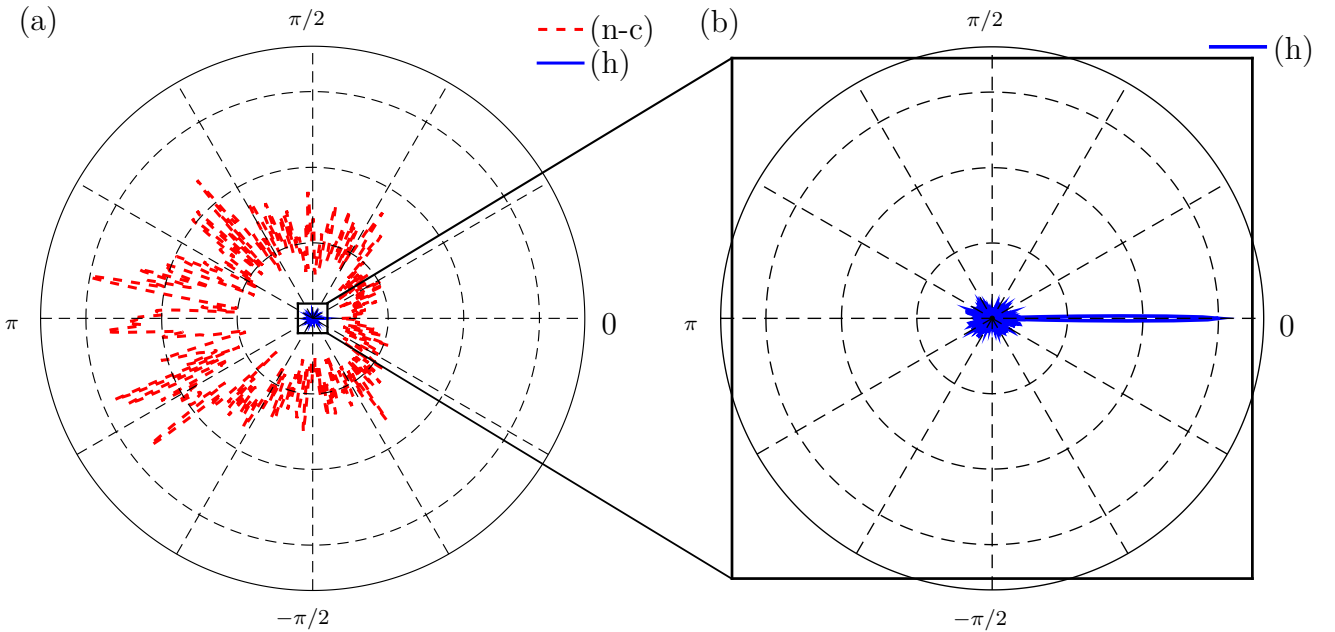
le second terme étant de l'ordre de  $1/(k_0 \ell_B)$ . Cette dernière estimation associée à l'Eq. (5.35) donne un ordre de grandeur pour le libre parcours moyen réel  $\ell_{\text{sca}}$  dans un milieu hyperuniform :  $\ell_{\text{sca}} \sim k_0 \ell_B^2$ . Le milieu sera effectivement transparent dans le cas où le système est encore en régime ballistique c'est-à-dire pour  $\ell_{\text{sca}} \gg L$ , condition qui se réécrit sous la forme :

$$\boxed{b_B \ll k_0 \ell_B}. \quad (5.38)$$

Cette relation donne une condition pour que le milieu hyperuniform puisse être transparent. Elle est aussi originale car elle lie deux grandeurs fondamentales de la propagation d'ondes en milieux complexes : le niveau du désordre donné par  $k_0 \ell_B$  et l'épaisseur optique du système donnée par  $b_B$ .

### 5.4.3 Résultats numériques

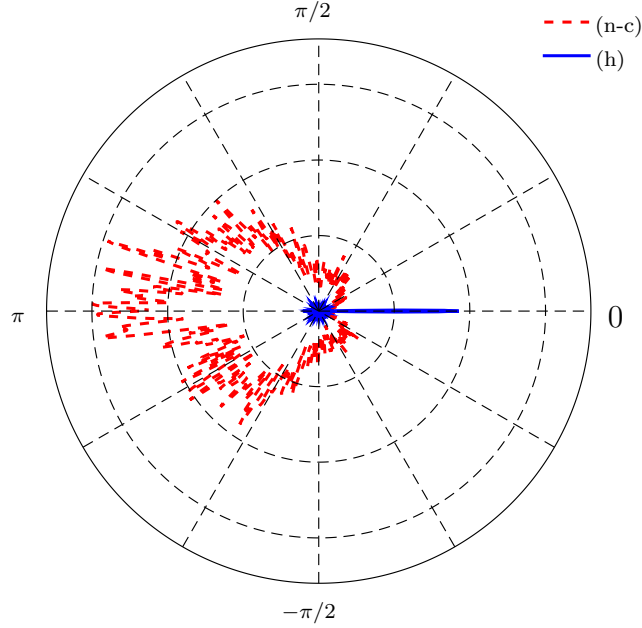
Les simulations numériques en accord avec la condition donnée par l'Eq. (5.38) sont effectuées et présentées sur la Fig. 5.6. Pour ces calculs :  $k_0 \ell_B = 44.4$ ,  $b_B = 5$ . Le résultat déjà obtenu en régime de



**Figure 5.6** – (a) Intensité diffusée  $I_{\text{diff}}(\theta, \omega)$  en fonction de  $\theta$  pour :  $b_B = 5$ ,  $K = 8k_0$ ,  $k_0 \ell_B = 44.4$  et  $N_{\text{conf}} = 20$  configurations hyperuniformes (ligne bleue continue) et configurations non corrélées de même densité et de même taille (ligne rouge pointillée). (b) Agrandissement de la partie centrale de la figure (a). (n-c) : Résultats pour les configurations non corrélées, (h) : Résultats pour les configurations hyperuniformes.

diffusion simple est retrouvé, sauf pour  $\theta$  proche de zéro à cause des effets de taille finie qui donnent lieu à de la diffusion vers l'avant (contrairement au cas de la diffusion simple la fonction de phase n'est pas nulle vers l'avant). C'est un résultat remarquable car simplement en ajoutant de l'ordre local dans les configurations non corrélées, il est possible de passer d'un système opaque à un système transparent sans pour autant que le système devienne cristallin.

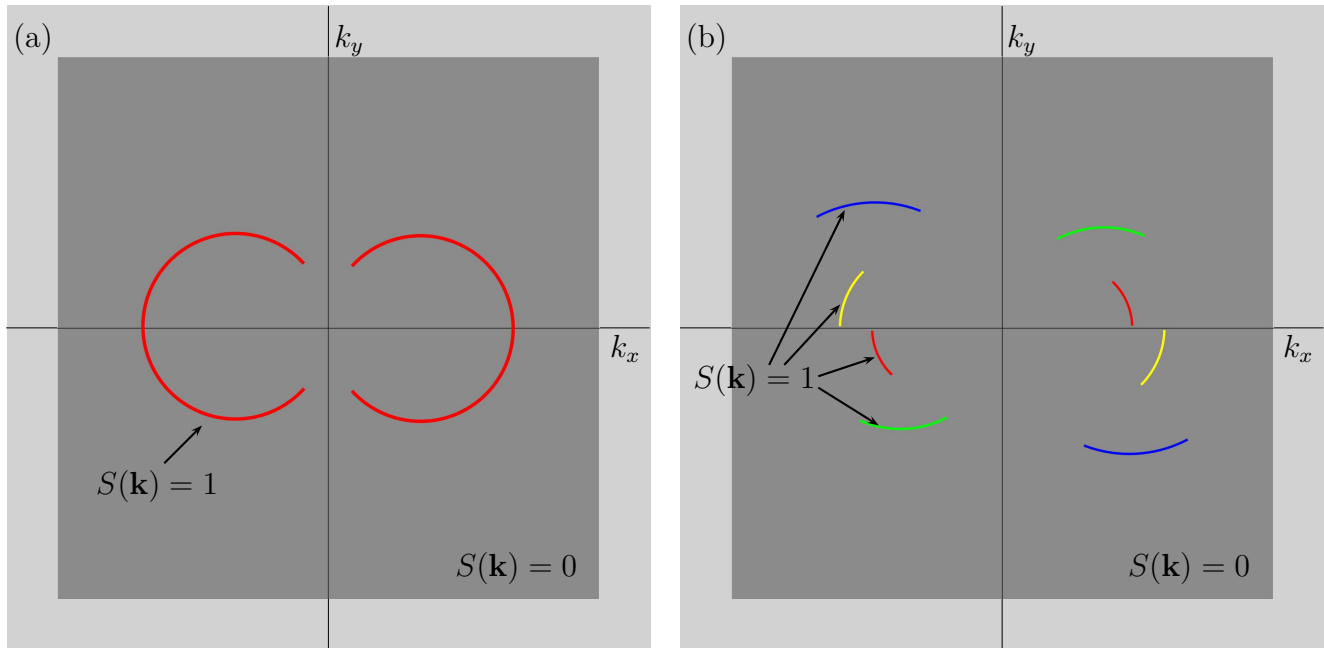
La Fig. 5.7 montre un exemple pour  $k_0\ell_B = 11$  et  $b_B = 20$ , ne vérifiant donc pas la condition de l'Eq. (5.38). Dans le cas des configurations hyperuniformes, les effets de taille finie ne sont plus négligeables. La fonction de phase s'élargit et le libre parcours moyen diminue. Toutefois, l'intensité diffusée reste modérée par rapport au cas non corrélé. Ce qui indique que la condition de Eq. (5.38) ne semble pas trop exigeante. Toutefois dans le cas où les diagrammes d'ordres supérieurs commencent à donner de la diffusion multiple, il est probablement encore possible d'introduire de nouvelles contraintes afin de minimiser l'influence ces diagrammes.



**Figure 5.7** – Intensité diffusée  $I_{\text{diff}}(\theta, \omega)$  en fonction de  $\theta$  pour :  $b_B = 20$ ,  $K = 8k_0$ ,  $k_0\ell_B = 11$ , et  $N_{\text{conf}} = 20$  configurations hyperuniformes (ligne bleue continue) et configurations non corrélées avec la même densité (ligne rouge pointillée). (n-c) Résultats pour les configurations non corrélées, (h) Résultats pour les configurations hyperuniformes.

## 5.5 Au-delà de l'hyperuniformité

Le facteur de structure gouverne la diffusion d'ondes dans un système ordonné ou désordonné. Comme il est possible de contrôler le facteur de structure de manière arbitraire, des structures aux propriétés surprenantes peuvent émerger. Par exemple une structure où le facteur de structure est nul sur un carré mais non nul sur le cercle d'Ewald d'une longueur d'onde donnée. En pénétrant dans le milieu une seule couleur serait diffusée, alors que les autres verraient un facteur de structure nul, cas de la Fig.5.8(a). Ainsi en sortie de l'objet la lumière aurait perdu une couleur. Il est donc possible d'imaginer des matériaux qui, à l'instar du ciel, apparaîtrait rouge et serait bleu en transmission. Des structures pourraient permettre d'aller plus loin en ne conservant qu'une portion non nulle du cercle d'Ewald pour différentes couleurs, comme le montre la Fig.5.8(b). De cette manière l'objet apparaîtrait de couleur différente selon la direction d'observation. On observerait donc de l'irridescence, mais due à une structure désordonnée. Ces applications du facteur de structure sont amusantes mais néanmoins assez limitées car elles ne fonctionnent que pour une seule direction d'incidence.



**Figure 5.8** – Zones gris clair :  $S(\mathbf{k})$  non contraint, zones gris foncé :  $S(\mathbf{k}) = 0$ . (a) Facteur de structure pour diffuser une longueur d'onde spécifique, zone rouge :  $S(\mathbf{k}) = 1$ . (b) Facteur de structure pour diffuser plusieurs longueurs d'ondes dans des directions spécifiques, zones colorées :  $S(\mathbf{k}) = 1$ .

## 5.6 Conclusion

En conclusion, les propriétés optiques des milieux hyperuniformes ont été étudiées. En diffusion simple, ces milieux peuvent être transparents ou diffuser la lumière vers l'arrière. En diffusion multiple la transparence peut être conservée sous réserve d'avoir  $b_B \ll k_0 \ell_B$ . Ces résultats montrent qu'en introduisant des corrélations dans le système il est possible de changer considérablement ses propriétés de transport, mais aussi qu'il est possible d'associer des propriétés des milieux cristallins (comme la transparence par exemple) à celle des milieux désordonnés (comme l'isotropie statistique ou la facilité de fabrication) en introduisant ou en contrôlant des corrélations dans le système. Ce travail ouvre la voie pour l'étude d'autres propriétés optiques, comme par exemple l'indice effectif, qui pourrait présenter des caractéristiques remarquables. La compréhension et l'étude des bandes interdites photoniques constitue également une suite pertinente pour ces travaux.



# Chapitre 6

## Effet des corrélations du désordre sur l'absorption

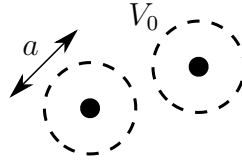
### Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>77</b>
<b>6.2</b>	<b>Calcul des coefficients d'extinction <math>\mu_{\text{ext}}</math>, de diffusion <math>\mu_{\text{sca}}</math> et d'absorption <math>\mu_{\text{abs}}</math></b>	<b>78</b>
6.2.1	Système d'intérêt	78
6.2.2	Principe du calcul	79
6.2.3	Calcul du coefficient d'extinction $\mu_{\text{ext}}$ pour un milieu désordonné corrélé	82
6.2.4	Calcul du coefficient de diffusion $\mu_{\text{sca}}$ pour un milieu désordonné corrélé	83
<b>6.3</b>	<b>Calcul semi-analytique de <math>\mu_{\text{ext}}</math>, <math>\mu_{\text{sca}}</math> et <math>\mu_{\text{abs}}</math> pour un milieu désordonné corrélé</b>	<b>86</b>
6.3.1	Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ et $\mu_{\text{sca}}$ sans absorption	86
6.3.2	Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ , $\mu_{\text{sca}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ en présence d'absorption	87
<b>6.4</b>	<b>Évaluations numériques de <math>\mu_{\text{ext}}</math> et <math>\mu_{\text{abs}}</math></b>	<b>89</b>
6.4.1	Évaluations numériques de $\mu_{\text{ext}}$	89
6.4.2	Évaluation numérique de $\mu_{\text{abs}}$	90
<b>6.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>93</b>

### 6.1 Introduction

Jusqu'à présent, dans le travail présenté dans ce manuscrit, l'absorption a été négligée. Pourtant dans la matière elle existe toujours. Généralement l'absorption est perçue comme un inconvénient car elle induit inévitablement une perte de signal. Cependant dans certains domaines, comme la conversion d'énergie photovoltaïque, l'absorption du matériau est une des grandeurs d'intérêt car elle est à la source du processus de transformation de lumière en énergie électrique.

Le développement de l'exploitation de l'énergie solaire constitue un important champ de recherche transdisciplinaire, liant la science des matériaux [100–105], l'optique [106, 107] et la nano-photonique [108–116]. Dans ces travaux de recherche, les structures étudiées sont souvent de type cristalline (réseau de diffraction), mais les structures désordonnées ont récemment suscité l'intérêt comme approche alternative pour augmenter l'efficacité des cellules photovoltaïques [7, 117–123]. Enfin à titre d'information, en s'inspirant de structures biologiques, un matériau présentant au moins 98% d'absorption entre 400 nm et 1400 nm quelque soit l'incidence et la polarisation a été réalisé [124].



**Figure 6.1** – Schéma de particules interagissant selon un potentiel de sphères dures, elles ne peuvent s'approcher les unes des autres à une distance inférieure à  $a$  et occupent un volume fictif  $V_0 = 4/3\pi(a/2)^3$ .

Dans le chapitre 5, il a été montré que l'introduction d'ordre partiel dans un milieu désordonné peut changer de manière spectaculaire ses propriétés de diffusion. Il est donc légitime de se demander s'il est possible de modifier ses propriétés d'absorption simplement en ordonnant partiellement sa structure. L'objectif de ce chapitre est d'étudier une telle possibilité en régime dilué avec des ondes scalaires en dimension trois. Le milieu modèle est formé de diffuseurs absorbants baignant dans un milieu hôte non absorbant. La situation inverse, où des diffuseurs non absorbants baignent dans un milieu hôte absorbant, est bien évidemment possible [125, 126]. Dans une première partie, le problème est abordé de manière théorique et formelle avec la détermination des coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$ , de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  et d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  prenant en compte les corrélations du désordre (ces coefficients sont les inverses des libres parcours moyen d'extinction, de diffusion et d'absorption). Dans une seconde partie, les prédictions pour  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{abs}}$  sont confrontées à des simulations numériques.

## 6.2 Calcul des coefficients d'extinction $\mu_{\text{ext}}$ , de diffusion $\mu_{\text{sca}}$ et d'absorption $\mu_{\text{abs}}$

### 6.2.1 Système d'intérêt

#### Diffuseurs ponctuels et absorbants

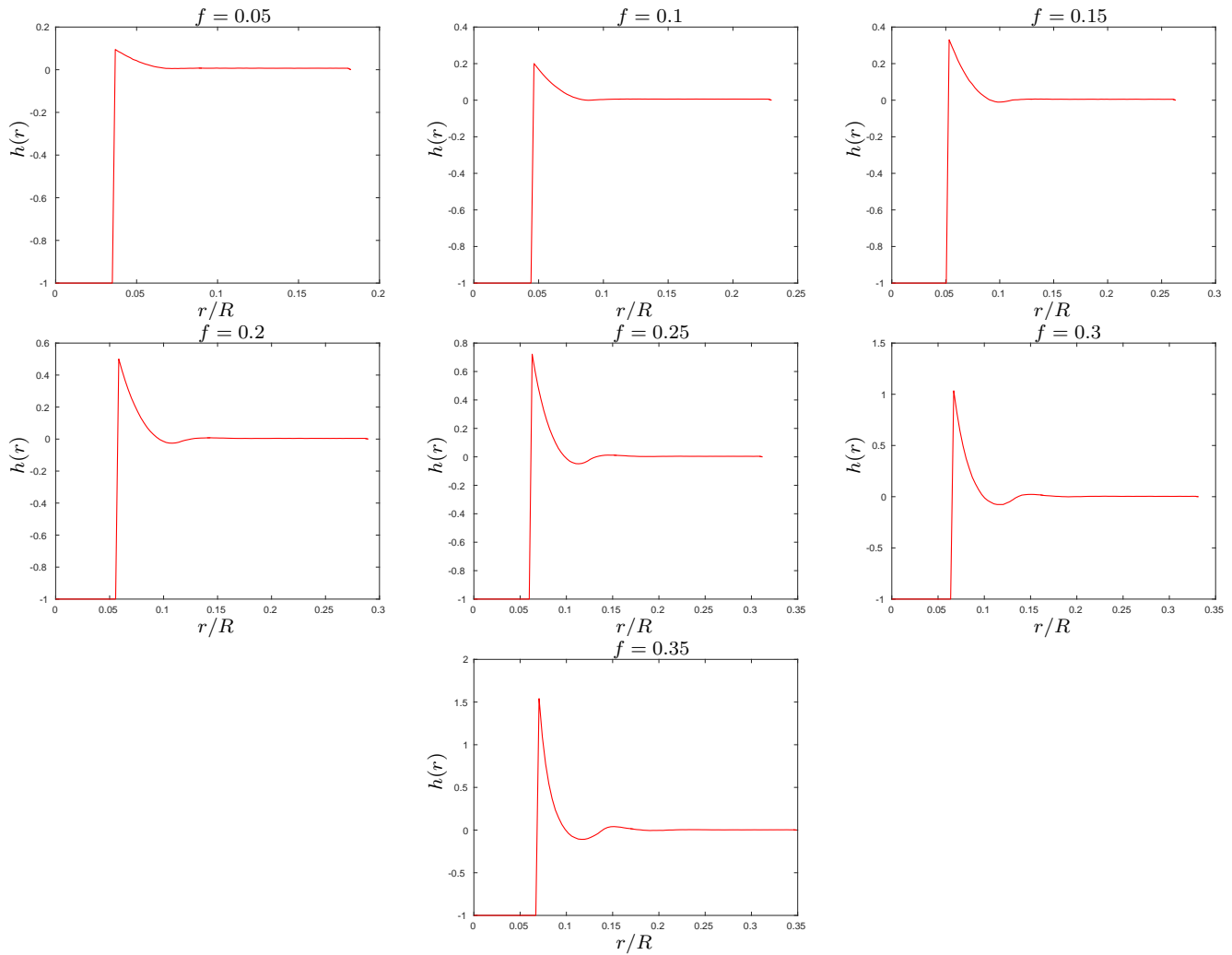
On considère un système formé de diffuseurs petits devant la longueur d'onde de manière à pouvoir être traités dans l'approximation dipolaire. La réponse des diffuseurs à une onde scalaire en dimension trois est représentée par une polarisabilité  $\alpha(\omega)$  donnée par

$$\alpha(\omega) = -\frac{4\pi\Gamma_R c^3}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i(\Gamma_R + \Gamma_{NR})\omega^3/\omega_0^2}, \quad (6.1)$$

$\omega_0$  est la pulsation à résonance,  $\Gamma_R$  rend compte des pertes par diffusion et  $\Gamma_{NR}$  des pertes par absorption.  $\omega_0$ ,  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_{NR}$  dépendent des propriétés optiques et géométriques des diffuseurs (voir chapitre 2). Dans toute la suite du chapitre, l'absorption est donc introduite avec  $\Gamma_{NR}$ . Pour  $\Gamma_{NR}$  nul, l'expression de la polarisabilité vérifie la relation de conservation d'énergie  $k_0 \text{Im}[\alpha(\omega)] = k_0^4 |\alpha(\omega)|^2 / 4\pi$  issue du théorème optique, comme établi dans le chapitre 2.

#### Introduction des corrélations du désordre

Les corrélations du désordre (c'est-à-dire ici les corrélations entre les positions des diffuseurs) sont quant à elles introduites avec un potentiel de sphères dures fictif [29]. Des particules interagissant selon un tel potentiel ne peuvent pas s'approcher à moins d'une distance inférieure au rayon d'exclusion  $a$  et peuvent être placées indifféremment l'une de l'autre lorsqu'elles sont distantes d'au moins  $a$ . Chaque diffuseur occupe alors un volume fictif  $V_0 = 4/3\pi(a/2)^3$ , comme l'illustre la Fig. 6.1.



**Figure 6.2** – Fonctions de corrélations de paire utilisées pour le calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{ext}}$ ,  $\mu_{\text{sca}}$  et  $\mu_{\text{abs}}$ . Elles sont évaluées avec des configurations de 8000 points contenus dans une sphère de rayon  $R$  (voir annexe B).

Le niveau des corrélations est alors évalué par la fraction volumique effective définie comme  $f = \rho V_0$ ,  $\rho$  étant la densité. Pour  $f \ll 0.5$  le système est peu corrélé et pour  $f \sim 0.5$  le système est très corrélé. En particulier les diffuseurs ne sont plus positionnés de manière indépendante, la probabilité  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  de trouver un diffuseur en  $\mathbf{r}'$  sachant qu'un autre diffuseur est en  $\mathbf{r}$  est donnée par

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(\mathbf{r})P(\mathbf{r}')[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \quad (6.2)$$

où  $P(\mathbf{r})$  est la probabilité de trouver un diffuseur en  $\mathbf{r}$ . En général  $P(\mathbf{r}) = 1/V$ ,  $V$  étant le volume du système, lorsque le système est statistiquement homogène.  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la fonction de corrélation de paire, elle donne l'écart à l'indépendance de  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Pour des systèmes invariants par translation et statistiquement isotropes,  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  peut s'écrire  $h(r)$ , avec  $r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ . Des exemples de fonctions de corrélations de paires correspondant au potentiel de sphères dures sont présentées sur la Fig. 6.2, celles-ci sont évaluées numériquement (voir annexe B).

### 6.2.2 Principe du calcul

Comme établi dans le chapitre 2, le coefficient d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  s'exprime avec la *self-energy* intervenant dans l'équation de Dyson. Avec l'approximation *on-shell* exposé dans le chapitre 2, il est donné



par

$$\mu_{\text{ext}} = \frac{\Sigma(k_r)}{k_r}, \quad (6.3)$$

où  $k_r = \sqrt{\text{Re}[k_{\text{eff}}^2]}$  et  $k_{\text{eff}}^2 = k_0^2 + \Sigma(k_r)$ ,  $k_0$  étant le module du vecteur d'onde dans le vide. La *self-energy*  $\Sigma$  peut s'exprimer sous la forme d'un développement diagrammatique, qui prend la forme d'un développement de Taylor en puissance de la densité  $\rho$ . À l'ordre un elle est donnée par

$$\Sigma = \text{O}, \quad (6.4)$$

où dans cette représentation, un cercle représente un diffuseur.  $\mu_{\text{ext}}$  est alors donné par

$$\mu_{\text{ext}} = \rho k_0 \text{Im}[\alpha(\omega)]. \quad (6.5)$$

Le résultat valide dans le régime de diffusion indépendante (*Independent Scattering Approximation* ou ISA en anglais) est alors retrouvé,  $\mu_{\text{ext}} = \rho \sigma_{\text{ext}}$ , où  $\sigma_{\text{ext}} = k_0 \text{Im}[\alpha(\omega)]$  est la section efficace d'extinction d'un diffuseur. Avec l'expression de  $\alpha(\omega)$  de l'Eq. (6.1),  $\sigma_{\text{ext}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R (\Gamma_R + \Gamma_{NR})}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (6.6)$$

De même  $\mu_{\text{sca}}$  s'exprime avec le vertex intensité  $\tilde{\Gamma}$  apparaissant dans l'équation de Bethe-Salpeter. En dimension trois pour des ondes scalaires, avec l'approximation *on-shell*,  $\mu_{\text{sca}}$  est donné par

$$\mu_{\text{sca}} = \frac{1}{16\pi^2} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (6.7)$$

À l'ordre un en  $\rho$  la représentation diagrammatique de  $\tilde{\Gamma}$  est

$$\tilde{\Gamma} = \text{O} \text{---} \text{O}, \quad (6.8)$$

où dans cette représentation la ligne verticale entre les deux diffuseurs indique que ceux-ci sont identiques.  $\mu_{\text{sca}}$  est alors donné par

$$\mu_{\text{sca}} = \rho \frac{k_0^4}{4\pi} |\alpha(\omega)|^2. \quad (6.9)$$

Le résultat de l'approximation de l'échelle est retrouvé,  $\mu_{\text{sca}} = \rho \sigma_{\text{sca}}$ , où  $\sigma_{\text{sca}} = k_0^4 |\alpha(\omega)|^2 / 4\pi$  est la section efficace de diffusion. Le libre parcours moyen de Boltzmann  $\ell_B = 1/\rho \sigma_{\text{sca}}$  est également retrouvé. Avec l'expression de  $\alpha(\omega)$  de l'Eq. (6.1),  $\sigma_{\text{sca}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{sca}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R^2}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (6.10)$$

Remarquons que, dans le cas de diffuseurs non absorbants, la conservation de l'énergie impose  $\mu_{\text{sca}} = \mu_{\text{ext}}$ . Dans le cas d'un milieu absorbant, le coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  est donné par  $\mu_{\text{ext}} - \mu_{\text{sca}}$ , son expression est alors

$$\mu_{\text{abs}} = \rho \sigma_{\text{abs}}, \quad (6.11)$$

où  $\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{ext}} - \sigma_{\text{sca}}$ . Avec l'expression de  $\alpha(\omega)$  de l'Eq. (6.1),  $\sigma_{\text{abs}}$  est donnée par

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{4\pi k_0^4 c^6 \Gamma_R \Gamma_{NR}}{\omega_0^4 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\Gamma_R + \Gamma_{NR})^2 \omega^6}. \quad (6.12)$$

Il est important de noter que la présence d'absorption modifie toutes les sections efficaces (en effet  $\sigma_{\text{sca}}$  dépend aussi de  $\Gamma_{NR}$ ).

Pour prendre en compte les corrélations du désordre dans le calcul de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$ , des processus de diffusion incluant plusieurs diffuseurs doivent intervenir dans le calcul de  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$ . En particulier, dans le chapitre 5, il est montré que pour un milieu désordonné corrélé, le vertex intensité est bien approximé par

$$\tilde{\Gamma} = \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} + \begin{array}{c} \bigcirc \\ \vdots \\ \bigcirc \end{array}, \quad (6.13)$$

où une ligne discontinue relie deux diffuseurs corrélés par la fonction de corrélation de paire  $h(r)$ . Cette écriture laisse penser qu'en approximant  $\Sigma$  de manière équivalente comme

$$\Sigma = \bigcirc + \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \text{---} \bigcirc \end{array}, \quad (6.14)$$

où une ligne pleine horizontale représente la fonction de Green du vide  $G_0$ , il est possible d'obtenir  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  de façon satisfaisante.

Cependant pour calculer le coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  de manière fiable, les expressions de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  doivent vérifier la conservation de l'énergie en absence d'absorption, c'est-à-dire  $\mu_{\text{ext}} = \mu_{\text{sca}}$ . Avec les approximations proposées pour  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$ , la conservation de l'énergie ne peut être vérifiée que dans le cas d'un désordre décrit par un continuum [127]. Pour un désordre décrit avec des diffuseurs discrets, il est nécessaire de compléter les expressions de  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  pour obtenir des expressions pour  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  prenant en compte les corrélations du désordre et vérifiant la conservation l'énergie. Ce qui apparait en plus dans le cas de diffuseurs ponctuels est la diffusion récurrente, c'est-à-dire le fait que l'onde puisse être diffusée plusieurs fois par les mêmes diffuseurs.

La condition sur la conservation de l'énergie pour des milieux non absorbants constitue l'identité de Ward [37]. Elle revient à écrire  $\mu_{\text{ext}} = \mu_{\text{sca}}$ , ce qui entre les termes de  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  revient à écrire

$$\frac{\text{Im} [\Sigma(k_r)]}{k_r} = \frac{1}{16\pi^2} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (6.15)$$

Dans l'Eq. (6.15), aucune approximation n'est effectuée sur  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$ . Toutefois, les développements diagrammatiques de  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  sont des développements limités en puissance de  $\rho$ . L'identité de Ward implique que les développements limités de  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  s'identifient, c'est-à-dire que la conservation de l'énergie doit se vérifier indépendamment à chaque ordre.

Dans la suite, pour tenir compte des corrélations, l'étude est restreinte à l'ordre deux. Les diagrammes pris en compte contiennent alors au plus deux diffuseurs différents. Pour obtenir  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$ , il est alors nécessaire d'identifier et de calculer tous les diagrammes d'ordre un et deux dans  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$ . Le calcul pour  $\Sigma$  est présenté dans la partie 6.2.3 et celui pour  $\tilde{\Gamma}$  dans la partie 6.2.4.

### 6.2.3 Calcul du coefficient d'extinction $\mu_{\text{ext}}$ pour un milieu désordonné corrélé

Il existe deux types de diagrammes à prendre en compte dans le calcul de  $\Sigma$  à l'ordre deux. Il y a d'abord ceux où les deux diffuseurs du diagramme ne sont pas corrélés, ils correspondent à la diffusion récurrente. Dans ces diagrammes, l'onde peut aller et venir une infinité de fois entre les deux diffuseurs. Deux classes de diagrammes se distinguent alors, ceux où l'onde commence et termine sur le même diffuseur [diagrammes boucles (L)] et ceux où elle termine son trajet sur l'autre diffuseur [diagrammes boomerangs (B)] [38]. La contribution des diagrammes boucles à  $\Sigma$  est

$$\Sigma_L = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \dots \quad (6.16)$$

Les deux diffuseurs reliés par une ligne brisée sont identiques. Celle des diagrammes boomerangs est

$$\Sigma_B = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \dots \quad (6.17)$$

Ces contributions se calculent comme des sommes géométriques [38, 128].

L'autre type de diagrammes est celui où les diffuseurs sont corrélés. Les deux classes de diagrammes présentées précédemment sont retrouvées en ajoutant la corrélation entre les deux diffuseurs, les contributions  $\Sigma_{L,\text{corr}}$  et  $\Sigma_{B,\text{corr}}$  à  $\Sigma$  sont respectivement

$$\Sigma_{L,\text{corr}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \dots \quad (6.18)$$

$$\Sigma_{B,\text{corr}} = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \dots \quad (6.19)$$

En plus de ces diagrammes, les corrélations font apparaitre un autre diagramme, donnant  $\Sigma_{\text{corr}}$

$$\Sigma_{\text{corr}} = \text{diagramme} \quad (6.20)$$

L'expression de  $\Sigma(\mathbf{k})$  est alors [38]

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{k}) = & \underbrace{\rho t + \rho^2 t^2 \int h(\mathbf{r}) G_0(r, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}}_{\Sigma_{\text{corr}}} + \underbrace{\rho^2 \int [1 + h(\mathbf{r})] \frac{t^3 G_0(r, \omega)^2}{1 - t^2 G_0(r, \omega)^2} d^3 \mathbf{r}}_{\Sigma_L + \Sigma_{L,\text{corr}}} \\ & + \underbrace{\rho^2 \int [1 + h(\mathbf{r})] \frac{t^4 G_0(r, \omega)^3}{1 - t^2 G_0(r, \omega)^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}}_{\Sigma_B + \Sigma_{B,\text{corr}}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $t = k_0^2 \alpha(\omega)$  et  $G_0(r, \omega) = \exp(ik_0 r) / 4\pi r$ .

Ces intégrales sont trop complexes pour pouvoir être calculée analytiquement, dans la suite elles sont évaluées numériquement. Cependant ces intégrales sont convergentes mais au sens faible, ce qui rend l'évaluation numérique difficile. C'est pourquoi une renormalisation est appliquée. La méthode consiste à remplacer dans ces intégrales  $G_0(\mathbf{r}, \omega)$  par la fonction de Green moyenne  $\langle G(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  [128],

cela revient à ajouter des diagrammes dans le calcul de  $\Sigma$ . En régime dilué, la fonction de Green moyenne est donnée par (voir chapitre 2)

$$\langle G(r, \omega) \rangle = \frac{\exp(ik_{\text{eff}} r)}{4\pi r}, \quad (6.22)$$

avec  $k_{\text{eff}} = \sqrt{k_0^2 + \Sigma(k_r)}$ . Comme  $k_{\text{eff}}$  a une partie imaginaire non nulle, les intégrales écrites précédemment sont absolument convergentes. Deux équations couplées pour  $\Sigma$  sont alors obtenues :

$$\begin{cases} \Sigma(k_r) = \rho t + \rho^2 t^2 \int h(\mathbf{r}) \langle G(r, \omega) \rangle \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \rho^2 \int [1 + h(\mathbf{r})] \frac{t^3 \langle G(r, \omega) \rangle^2}{1 - t^2 \langle G(r, \omega) \rangle^2} d^3\mathbf{r} \\ \quad + \rho^2 \int [1 + h(\mathbf{r})] \frac{t^4 \langle G(r, \omega) \rangle^3}{1 - t^2 \langle G(r, \omega) \rangle^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \\ \langle G(r, \omega) \rangle = \frac{\exp(ik_{\text{eff}} r)}{4\pi r}, \quad k_{\text{eff}} = k_r + i \text{Im}[\Sigma(k_r)]/2k_r. \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans la pratique ce système d'équations se résout par itérations, en prenant comme point de départ  $\Sigma(k_r) = \rho t$ .  $\langle G(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  est alors déterminée, de même que  $\mu_{\text{ext}}$  avec

$$\mu_{\text{ext}} = \frac{\text{Im}[\Sigma(k_r)]}{k_r}. \quad (6.24)$$

### 6.2.4 Calcul du coefficient de diffusion $\mu_{\text{sca}}$ pour un milieu désordonné corrélé

La démarche pour la détermination de l'ensemble des diagrammes d'ordre deux pour le vertex intensité est similaire à celle pour la *self-energy*, mais est moins intuitive.

Pour la diffusion récurrente, il apparait six classes de diagrammes à considérer, elles sont présentées avec leurs premiers diagrammes [38, 128] :

— échelles irréductibles (EI)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{EI}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the left, connecting the top-left and bottom-left vertices.} \\ \text{Diagram 2: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the right, connecting the top-right and bottom-right vertices.} \\ \text{Diagram 3: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the left, connecting the top-left and bottom-right vertices.} \\ \text{Diagram 4: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the right, connecting the top-right and bottom-left vertices.} \end{array} + \dots \quad (6.25)$$

— croisés (C)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{C}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two vertices connected by two crossing lines forming an X-shape.} \end{array} + \dots \quad (6.26)$$

— échelles bouclées (EB)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{EB}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the left, connecting the top-left and bottom-left vertices.} \\ \text{Diagram 2: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the right, connecting the top-right and bottom-right vertices.} \end{array} + \dots \quad (6.27)$$

— croisés en avant (CA)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{CA}} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square with a horizontal line on top and a vertical line on the left, connecting the top-left and bottom-left vertices.} \end{array} + \dots \quad (6.28)$$

— boucles (B)

$$\tilde{\Gamma}_B = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.29)$$

Le calcul de ces différentes contributions est alors nettement plus délicat car il faut considérer tous les aller-retours possibles entre les deux diffuseurs. Le calcul donne [38] :

— échelles irréductibles

$$\tilde{\Gamma}_{EI}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \rho^2 |t|^2 \int |tG_0(r, \omega)|^2 \left( \frac{1}{|1 - t^2 G_0(r, \omega)^2|^2} - 1 \right) d^3 \mathbf{r}, \quad (6.30)$$

— croisés

$$\tilde{\Gamma}_C(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \rho^2 |t|^2 \int \frac{|tG_0(r, \omega)|^2}{|1 - t^2 G_0(r, \omega)^2|^2} \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] d^3 \mathbf{r}, \quad (6.31)$$

— échelles bouclées

$$\tilde{\Gamma}_{EB}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \rho^2 |t|^2 \int 2 \operatorname{Re}[tG_0(r, \omega)] \left( \frac{1}{|1 - t^2 G_0(r, \omega)^2|^2} - 1 \right) [\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}, \quad (6.32)$$

— croisés en avant

$$\tilde{\Gamma}_{CA}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \rho^2 |t|^2 \int \left( \frac{1}{|1 - t^2 G_0(r, \omega)^2|^2} - 1 \right) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] d^3 \mathbf{r}, \quad (6.33)$$

— boucles

$$\tilde{\Gamma}_B(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \rho^2 |t|^2 \int \left( \frac{1}{|1 - t^2 G_0(r, \omega)^2|^2} - 1 \right) d^3 \mathbf{r}. \quad (6.34)$$

Pour les mêmes raisons que dans la section 6.2.3, la renormalisation est aussi appliquée et  $G_0$  est remplacée par  $\langle G \rangle$ . L'identité de Ward en l'absence d'absorption n'est alors vérifiée que de manière approchée car les digrammes ajoutés pour  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  ne sont plus équivalents.

De même que pour  $\Sigma$ , les versions corrélées de ces diagrammes existent et sont données par

— échelles irréductibles corrélées (EI,corr)

$$\tilde{\Gamma}_{EI, \text{corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.35)$$

— croisés corrélés (C,corr)

$$\tilde{\Gamma}_{C, \text{corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.36)$$

— échelles bouclées corrélées (EB,corr)

$$\tilde{\Gamma}_{EB, \text{corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.37)$$

— croisés en avant corrélés (CA,corr)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{CA,corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.38)$$

— boucles corrélées (B,corr)

$$\tilde{\Gamma}_{\text{B,corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots \quad (6.39)$$

Ces diagrammes se calculent de la même manière que les versions non corrélées en pondérant les intégrants par  $h(\mathbf{r})$ .

Les corrélations font aussi apparaitre six autres diagrammes, leur contribution est donnée dans  $\tilde{\Gamma}_{\text{corr}}$ ,

$$\tilde{\Gamma}_{\text{corr}} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array}. \quad (6.40)$$

Les versions non renormalisées des cinq premiers diagrammes ont été rencontrées dans le chapitre 5. La contribution de ces termes à  $\mu_{\text{sca}}$ , notée  $\mu_{\text{sca,corr}}$ , se calcule comme

$$\begin{aligned} \mu_{\text{sca,corr}} = & \rho^2 |t|^2 \int h(r) \frac{\sin^2(k_r r)}{k_r^2} dr + 4\rho^2 \int h(r) \text{Re}[t \langle G(r, \omega) \rangle] \frac{\sin(k_r r)}{k_r} r dr \\ & + \rho^2 |t|^4 \int h(r) |\langle G(r, \omega) \rangle|^2 r^2 dr. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Le coefficient de diffusion est alors obtenu en additionnant l'ensemble de ces contributions plus la contribution d'ordre un,

$$\mu_{\text{sca}} = \frac{1}{16\pi^2} \int \tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (6.42)$$

La connaissance de  $\tilde{\Gamma}$  donne également la fonction de phase  $p(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$  (voir chapitre 2),

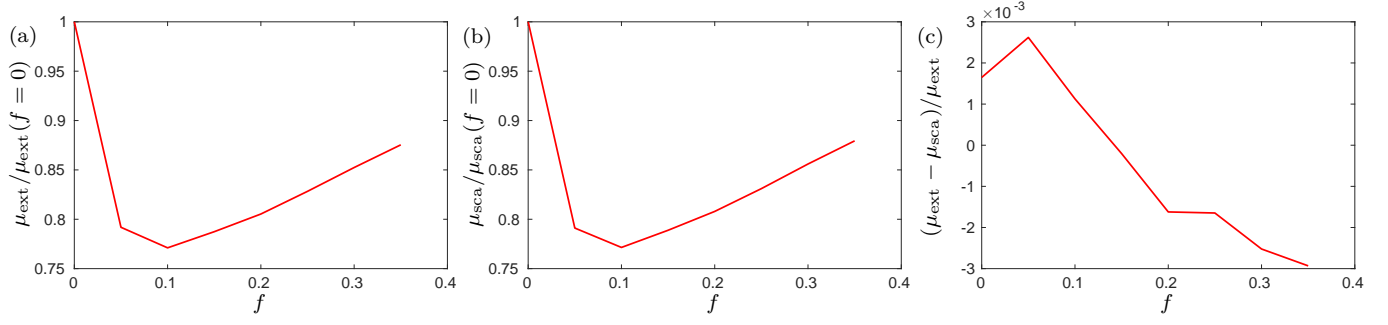
$$p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{\tilde{\Gamma}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u})}{4\pi \mu_{\text{sca}}}. \quad (6.43)$$

Le facteur d'anisotropie peut donc être calculé selon

$$g = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} p(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) d\Omega, \quad (6.44)$$

ainsi que le coefficient de transport  $\mu^*$ , défini comme  $\mu^* = 1/\ell^*$  ( $\ell^*$  étant le libre parcours moyen de transport),

$$\mu^* = (1 - g) \mu_{\text{sca}}. \quad (6.45)$$



**Figure 6.3** – (a) Calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{ext}}(f)$  sans absorption. (b) Calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{sca}}(f)$  sans absorption. (c) Écart à la conservation de l'énergie, défini comme  $(\mu_{\text{ext}} - \mu_{\text{sca}})/\mu_{\text{ext}}$ . Les variations de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  sont de l'ordre de 20% en présence de corrélations, alors que l'écart à la conservation de l'énergie est de 0.3%, ce qui montre la validité de la méthode de calcul employée. Paramètres :  $k_0\ell_B = 50$ ,  $\rho = 7.5 \times 10^{18}\text{m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15}\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15}\text{s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 10^{15}\text{s}^{-1}$  et  $\Gamma_{NR} = 0\text{s}^{-1}$ .

## 6.3 Calcul semi-analytique de $\mu_{\text{ext}}$ , $\mu_{\text{sca}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ pour un milieu désordonné corrélé

### 6.3.1 Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ et $\mu_{\text{sca}}$ sans absorption

Cette partie a pour but de vérifier la validité des expressions de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  obtenues précédemment. Seulement, les intégrales dans ces expressions sont trop complexes pour pouvoir être déterminées analytiquement, en particulier à cause de la fonction de corrélation de paire qui n'est pas connue analytiquement (voir Fig. 6.2). Ces intégrales sont calculées numériquement par une routine standard d'intégration. Les expressions des coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  et de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  sont donc semi-analytiques.

Un cas où les corrélations du désordre influent beaucoup sur les propriétés optiques macroscopiques est choisi pour faire en sorte de s'éloigner drastiquement du cas de la diffusion indépendante. Comme dans le chapitre 5, la densité  $\rho$  est donc prise de manière à ce que la distance moyenne entre diffuseurs  $\langle d \rangle$  soit de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$ . Or, la condition  $k_0\ell_B \gg 1$  est nécessaire pour que  $\mu_{\text{ext}}$ ,  $\mu_{\text{sca}}$  et  $\mu_{\text{abs}}$  existent. Comme  $\ell_B = 1/\rho\sigma_{\text{sca}}$ , on a  $k_0\ell_B \sim 1/k_0^2\sigma_{\text{sca}}$ , ainsi la condition  $k_0\ell_B \gg 1$  est équivalente à  $1/k_0^2 \gg \sigma_{\text{sca}}$ . Les diffuseurs sont donc hors résonance.

En cohérence avec les conditions explicitées précédemment, les calculs semi-analytiques sont effectués avec les paramètres suivants :  $\rho = 7.5 \times 10^{18}\text{m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15}\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15}\text{s}^{-1}$  et  $\Gamma_R = 10^{15}\text{s}^{-1}$ . Ces paramètres donnent  $k_0\ell_B = 50$  et  $\langle d \rangle/\lambda = 0.6$ .  $\Gamma_{NR}$  est d'abord pris nul (milieu non absorbant) pour vérifier la conservation de l'énergie et la cohérence entre les calculs de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$ .

Les Fig. 6.3(a) et Fig. 6.3(b) montrent les résultats des calculs de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  pour des fractions volumiques  $f$  allant de 0 à 0.35. Les variations de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  sont significatives avec  $f$ . La Fig. 6.3(c) montre l'écart à la conservation de l'énergie, celui-ci est de l'ordre de 0.3%, ce qui montre la légitimité de la méthode de calcul employée.

### 6.3.2 Calcul de $\mu_{\text{ext}}$ , $\mu_{\text{sca}}$ et $\mu_{\text{abs}}$ en présence d'absorption

Les calculs semi-analytiques sont maintenant effectués avec une absorption non nulle dans les diffuseurs. Le niveau d'absorption est donné par  $\Gamma_{NR}$ . Si  $\Gamma_{NR} \ll \Gamma_R$  le milieu est peu absorbant et si  $\Gamma_{NR} > \Gamma_R$  le milieu est très absorbant car la majorité de l'énergie cédée par le champ à la matière est absorbée et non diffusée. La Fig. 6.4 montre les résultats du calcul semi-analytique des différents coefficients en fonction du niveau de corrélation du désordre (évalué par  $f$ ) pour plusieurs niveaux d'absorption. La Fig. 6.4(a) présente le coefficient d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$ , la Fig. 6.4(b) le coefficient de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$ , la Fig. 6.4(c) le coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$ , la Fig. 6.4(d) montre l'évolution relative de  $\mu_{\text{abs}}$  avec les corrélations, la Fig. 6.4(e) présente le facteur d'anisotropie  $g$  et la Fig. 6.4(f) le coefficient de transport  $\mu^*$ .

On constate que l'évolution relative de  $\mu_{\text{abs}}$  avec le niveau de corrélation est assez modérée. Cette observation peut s'interpréter de manière qualitative avec les développements diagrammatiques de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  en distinguant certains termes. En particulier, on retient pour la *self-energy* l'expression suivante :

$$\Sigma = \text{O} + \text{O} \text{---} \text{O}, \quad (6.46)$$

et pour le vertex intensité les diagrammes suivants :

$$\tilde{\Gamma} = \text{O} + \text{O}. \quad (6.47)$$

Comme indiqué précédemment, ces développements pour  $\Sigma$  et  $\tilde{\Gamma}$  ne vérifient pas la conservation de l'énergie en l'absence d'absorption. Néanmoins, en régime dilué, la contribution de la diffusion récurrente est faible, de même que celle des autres diagrammes de  $\tilde{\Gamma}$  dus aux corrélations, comme cela a été observé dans le chapitre 4. L'ensemble de ces contributions reste cependant essentiel pour vérifier la conservation de l'énergie. À partir des Eq. (6.46) et Eq. (6.47),  $\mu_{\text{abs}}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mu_{\text{abs}} = & \rho\sigma_{\text{abs}} + \rho^2 2t't'' \int \frac{h(r) \cos(k_r r) \sin(k_r r) \exp(-\mu_{\text{ext}} r)}{k_r^2} dr \\ & + \rho^2 (|t|^2 - 2t''^2) \int \frac{h(r) \sin^2(k_r r) \exp(-\mu_{\text{ext}} r)}{k_r^2} dr - \rho^2 |t|^2 \int h(r) \frac{\sin^2(k_r r)}{k_r^2} dr, \end{aligned} \quad (6.48)$$

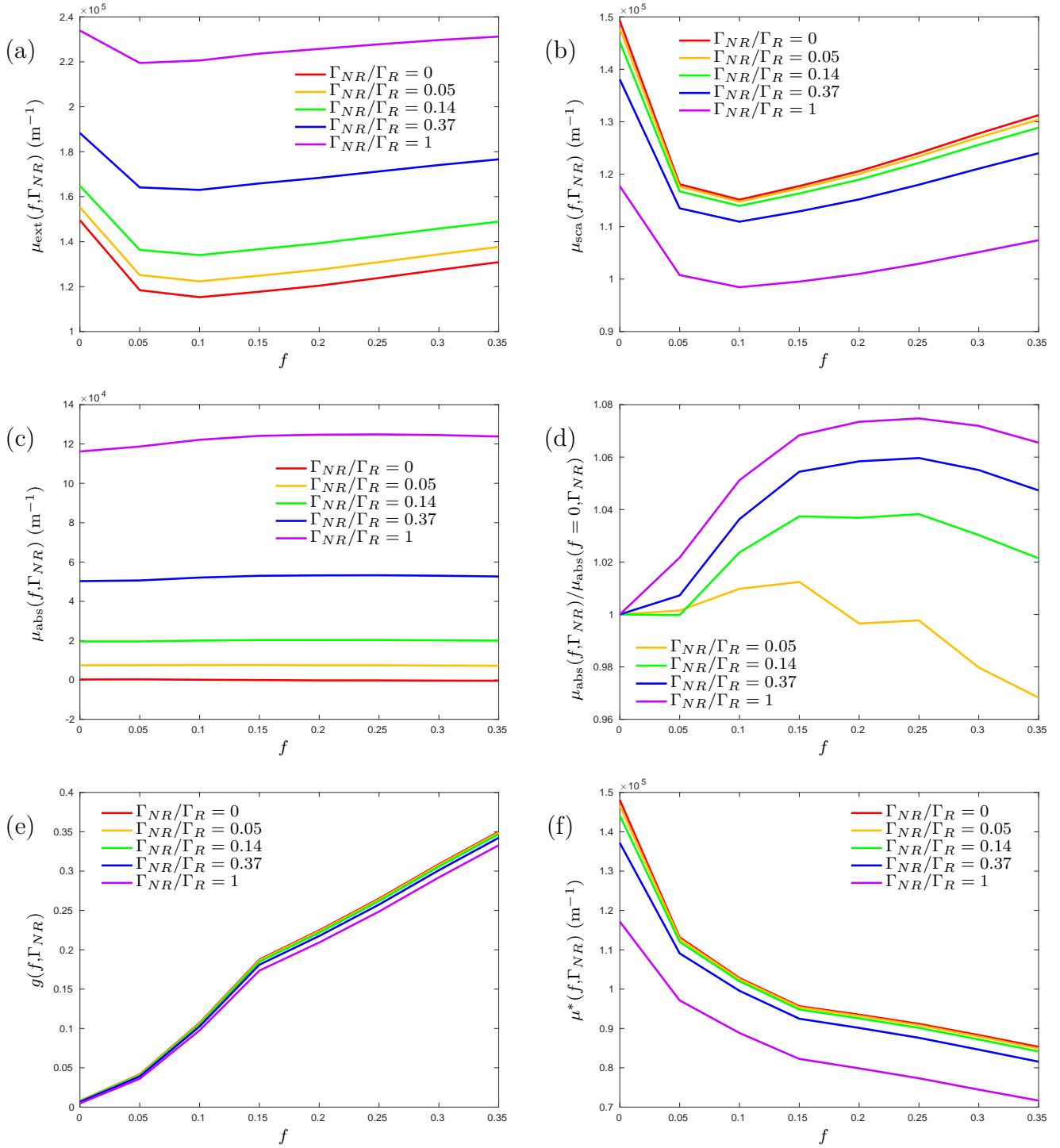
où  $t = k_0^2 \alpha(\omega) = t' + it''$ . Comme  $k_0 \ell_B \gg 1$ , on peut supposer (au moins à faible absorption) que  $1/k_0 \ll \ell_{\text{ext}}$  et donc  $\langle d \rangle \ll \ell_{\text{ext}}$ , car  $\langle d \rangle \sim \lambda$ .  $h(r)$  est non nulle seulement sur des distances inférieures à quelques  $\langle d \rangle$ . Donc, dans les intégrales de l'Eq. (6.48), il est possible d'approximer  $\exp(-\mu_{\text{ext}} z)$  par l'unité.  $\mu_{\text{abs}}$  se simplifie donc comme

$$\begin{aligned} \mu_{\text{abs}} = & \rho\sigma_{\text{abs}} + \rho^2 2t't'' \int \frac{h(r) \cos(k_r r) \sin(k_r r)}{k_r^2} dr \\ & - 2\rho^2 t''^2 \int \frac{h(r) \sin^2(k_r r)}{k_r^2} dr. \end{aligned} \quad (6.49)$$

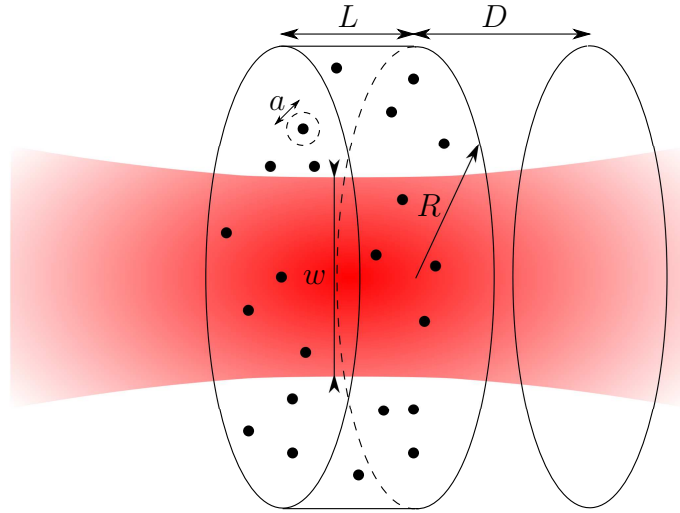
Les principales contributions dues aux corrélations, à savoir celles données par les diagrammes

$$\text{O} \text{---} \text{O} \text{ et } \text{O} \text{---} \text{O}, \quad (6.50)$$





**Figure 6.4** – (a) Résultats du calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{ext}}$  en présence de corrélations et d'absorption. (b) Résultats du calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{sca}}$  en présence de corrélations et d'absorption. (c) Résultats du calcul semi-analytique de  $\mu_{\text{abs}}$  en présence de corrélations et d'absorption. (d) Évaluation de l'évolution de  $\mu_{\text{abs}}$  avec les corrélations pour plusieurs niveaux d'absorption avec le rapport  $\mu_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR})/\mu_{\text{abs}}(f=0, \Gamma_{NR})$ , ce résultat suggère que  $\mu_{\text{abs}}$  dépend peu des corrélations. (e) Calcul du facteur d'anisotropie  $g$  en présence de corrélations et d'absorption. (f) Calcul du coefficient de transport  $\mu^* = 1/\ell^*$  en présence de corrélations et d'absorption. Paramètres :  $k_0 \ell_B = 50$ ,  $\rho = 7.5 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$  et  $\Gamma_R = 10^{15} \text{s}^{-1}$ .



**Figure 6.5** – Géométrie du système pour le calcul numérique de  $\mu_{\text{ext}}$ . Le système est un cylindre de rayon  $R = 1.66 \times 10^{-5}$  m et d'épaisseur  $L$  variable.  $N$  points sont disposés à l'intérieur avec une densité  $\rho = 7.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$  selon un potentiel de sphères dures de rayon d'exclusion  $a$  caractéristique des corrélations. Le système est éclairé par un faisceau gaussien de taille transverse  $w = 8.38 \times 10^{-6}$  m, focalisé au centre du système. Le champ moyen est calculé sur un écran à une distance  $D = 10^{-6}$  m en sortie du système.

sont donc quasi absente dans  $\mu_{\text{abs}}$  et ceci est valable quel que soit le niveau de corrélation ou le niveau d'absorption. Or, comme montré dans le chapitre 5 ce sont ces contributions qui changent le plus  $\mu_{\text{sca}}$  et  $\mu_{\text{ext}}$ . De plus, les diffuseurs sont hors résonance, ainsi  $|t| \rightarrow 0$  et  $t' \gg t''$ . Les modifications de  $\mu_{\text{abs}}$  engendrées par les contributions des autres termes de  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$  ne peuvent être que modérées. Ce dernier résultat suggère l'approximation suivante,

$$\mu_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = \rho \sigma_{\text{abs}}, \quad (6.51)$$

puisque les corrélations et la diffusion récurrente n'ont qu'un faible impact sur le coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$ . Il est enfin utile de préciser qu'il n'a pas été possible de calculer  $\mu_{\text{abs}}$  pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 0.05$ , car en deçà d'un certain niveau d'absorption,  $\mu_{\text{abs}}$  devient comparable à l'incertitude numérique due à la méthode d'intégration retenue.

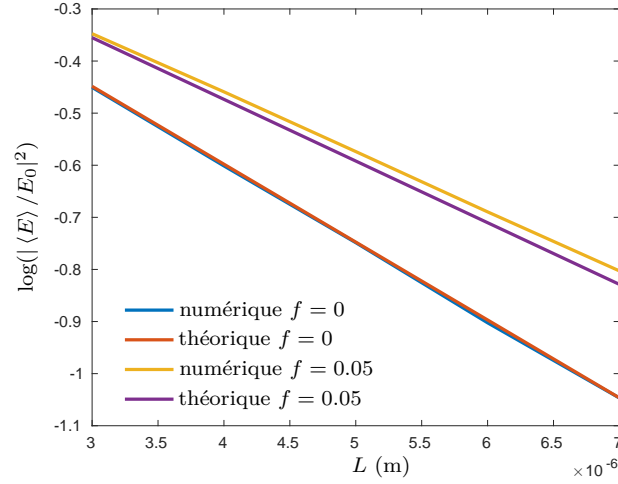
## 6.4 Évaluations numériques de $\mu_{\text{ext}}$ et $\mu_{\text{abs}}$

### 6.4.1 Évaluations numériques de $\mu_{\text{ext}}$

Le but de cette partie est de vérifier la validité de l'expression obtenue pour  $\mu_{\text{ext}}$  en la confrontant à des simulations numériques exactes de la diffusion et de l'absorption d'une onde dans un système désordonné corrélé.  $\mu_{\text{ext}}$  donne l'amortissement du champ moyen dans le milieu, la détermination de  $\mu_{\text{ext}}$  va donc s'effectuer en calculant le champ moyen transmis à travers le milieu diffusant.

Le système pour le calcul numérique de  $\mu_{\text{ext}}$  consiste en un cylindre aplati dans lequel  $N$  diffuseurs sont répartis aléatoirement. Le milieu est ensuite éclairé par un faisceau gaussien de taille transverse inférieure à son rayon, permettant d'éviter les effets de taille finie, tout en étant grande devant la longueur d'onde pour approcher une onde plane. La géométrie du système est présentée sur la Fig. 6.5.

Le champ se calcule de la même manière que dans le chapitre 3 avec la méthode des dipôles couplés en résolvant le système de  $N$  équations suivant,  $j$  allant de 1 à  $N$  (pour les calculs  $N$  est compris



**Figure 6.6** – Calcul de l’atténuation du champ moyen pour plusieurs épaisseurs  $L$  du milieu. Le calcul de  $\mu_{\text{ext}}$  sans corrélations, donc avec la diffusion récurrente seule, donne un excellent accord avec les valeurs numériques. En présence de corrélations, l’écart entre la pente théorique et numérique est de 3%. Paramètres :  $k_0 \ell_B = 50$ ,  $\rho = 7.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 10^{15} \text{ s}^{-1}$  et  $\Gamma_{NR} = 0 \text{ s}^{-1}$ .

entre 20000 et 45000),

$$E_j^{\text{exc}} = E_0(\mathbf{r}_j, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N G_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \omega) E_l^{\text{exc}}. \quad (6.52)$$

$E_j^{\text{exc}}$  est le champ exciteur sur le diffuseur  $j$  et  $E_0(\mathbf{r}_j, \omega)$  est l’amplitude du champ rayonné par la source sur le diffuseur  $j$ . Une fois les champs excitateurs déterminés, il est possible de calculer le champ à n’importe quel endroit de l’espace par principe de superposition, en utilisant

$$E(\mathbf{r}, \omega) = E_0(\mathbf{r}, \omega) + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{j=1}^N G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j, \omega) E_j^{\text{exc}}. \quad (6.53)$$

Le champ moyen est alors calculé dans un plan à une distance  $D = 10^{-6} \text{ m}$  en sortie du milieu. En chaque point du plan, l’intensité du champ moyen est, en théorie, amortie d’un facteur  $\exp(-\mu_{\text{ext}} L)$  par rapport à l’intensité incidente. Afin d’accélérer la convergence du calcul numérique, ce facteur est moyenné sur la portion centrale du plan d’observation.

Les résultats numériques sont présentés sur la Fig. 6.6. L’accord entre les données numériques et semi-analytiques est excellent en l’absence de corrélations. Pour  $f = 0.05$  les données numériques et semi-analytiques présentent un écart de 3%, probablement dû aux effets de taille finie. Cet écart est néanmoins modéré et ne remet pas en cause la validité de la méthode de calcul analytique de  $\mu_{\text{ext}}$ .

### 6.4.2 Évaluation numérique de $\mu_{\text{abs}}$

L’évaluation numérique de  $\mu_{\text{abs}}$  est moins simple que celle de  $\mu_{\text{ext}}$ , car il n’existe pas de grandeur qui ne dépende explicitement que de  $\mu_{\text{abs}}$ . Cette difficulté va être contournée en calculant la puissance absorbée dans un milieu soumis à un éclairage particulier.

### Calcul analytique de la puissance absorbée pour un éclairage lambertien et lien avec $\mu_{\text{abs}}$

Un éclairage lambertien est uniforme, isotrope et spatialement incohérent. Il peut être vu comme un ensemble d'ondes planes incohérentes se propageant dans toutes les directions de l'espace. Physiquement, cette illumination correspond à celle d'un corps noir à l'équilibre [129].

Intéressons-nous tout d'abord au cas d'un système non absorbant mais éventuellement corrélé. En régime dilué la propagation de la lumière est régie par l'Équation de Transfert Radiatif (ETR). Pour un système non absorbant soumis à un éclairage lambertien, le calcul de l'intensité est élémentaire [130]. En effet, les conditions de bords imposent pour la luminance, à la surface du système pour des vecteurs  $\mathbf{u}$  entrants,  $L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = L_0$ , où  $L_0$  est la luminance du faisceau lambertien. Ainsi  $L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = L_0$  dans le système est la seule solution de l'ETR vérifiant les conditions de bords. Notons en particulier qu'elle ne dépend pas des corrélations du désordre du système considéré, c'est là l'intérêt d'avoir choisi un éclairage lambertien.

Dans ce cadre, passons maintenant au calcul de la puissance absorbées dans un système absorbant. Par définition, la puissance absorbée  $dP_{\text{abs}}$  dans un volume élémentaire  $d^3\mathbf{r}$  positionné en  $\mathbf{r}$  est donnée par

$$dP_{\text{abs}} = c\mu_{\text{abs}}u(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad (6.54)$$

où  $u(\mathbf{r})$  est la densité d'énergie. La puissance absorbée dans le milieu est alors

$$P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = c\mu_{\text{abs}} \int_V u(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}, \quad (6.55)$$

où  $V$  désigne le volume du système. Il est intéressant de décomposer  $u(\mathbf{r})$  de la manière suivante

$$u(\mathbf{r}) = u_0 + \delta u(\mathbf{r}), \quad (6.56)$$

où  $u_0 = 4\pi L_0/c$  est la densité d'énergie en l'absence d'absorption et  $\delta u(\mathbf{r})$  l'écart à  $u_0$  introduit par l'absorption. La puissance absorbée est alors

$$P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = c\mu_{\text{abs}} \int_V [u_0 + \delta u(\mathbf{r})]d^3\mathbf{r}. \quad (6.57)$$

En considérant un milieu peu absorbant,  $\mu_{\text{abs}}$  tend vers 0 de même que  $\delta u(\mathbf{r})$ . Ainsi à l'ordre le plus bas, la puissance absorbée est donnée par

$$P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = c\mu_{\text{abs}}Vu_0, \quad (6.58)$$

La puissance absorbée est donc proportionnelle à  $\mu_{\text{abs}}$  dans ces conditions. Pour faire le lien avec le calcul numérique, le lien entre  $u_0$  et  $L_0$  ne suffit pas. Il faut exprimer la puissance absorbée en fonction de l'intensité de l'éclairage lambertien  $I_0 = |E_0|^2$ . En absence d'absorption, la densité d'énergie  $u_0$  s'exprime comme

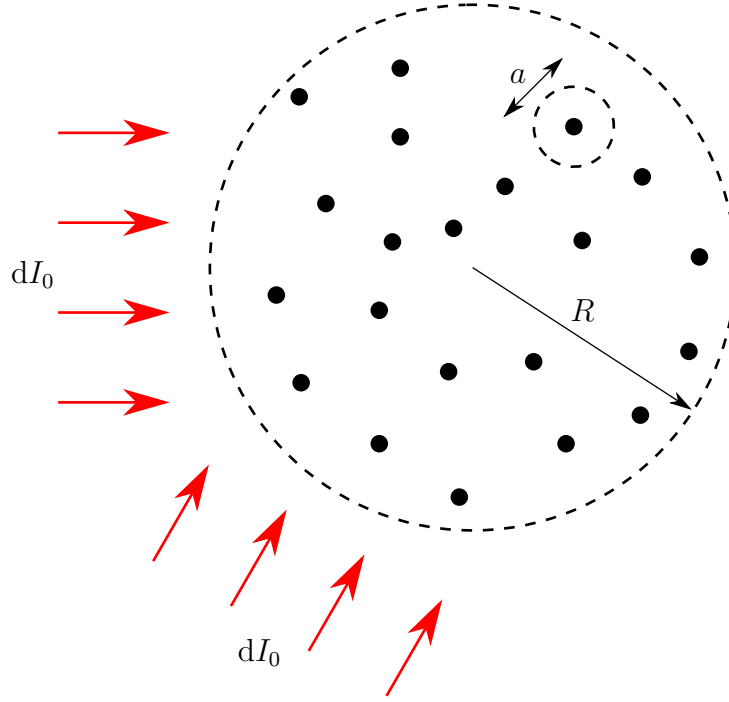
$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 I_0. \quad (6.59)$$

Dans un milieu peu absorbant, la puissance est finalement donnée par

$$\boxed{P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\mu_{\text{abs}}VI_0}. \quad (6.60)$$

Pour cette approximation, un milieu peu absorbant est compris comme un milieu tel que  $L \ll \ell_{\text{abs}}$ , avec  $\ell_{\text{abs}} = 1/\mu_{\text{abs}}$  et  $L$  la taille caractéristique du système. Si de plus, l'approximation de l'Eq. (6.51) est appliquée, un ordre de grandeur pour  $P_{\text{abs}}$  est donné par

$$P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c\rho\sigma_{\text{abs}}VI_0. \quad (6.61)$$



**Figure 6.7** – Géométrie du système utilisé pour l'étude numérique de la puissance absorbée sous éclairage lambertien d'intensité  $I_0$ . Le système est éclairé par un ensemble d'ondes planes d'intensité  $dI_0$  se propageant dans toutes les directions de l'espace. Numériquement,  $dI_0$  est défini comme  $I_0/M$ ,  $M$  étant le nombre total d'ondes planes de l'éclairage. Le rayon du système est  $R$  et le rayon d'exclusion entre les diffuseurs est  $a$ .

### Simulations numériques

Afin de vérifier la prédiction analytique de la partie précédente donnée par l'Eq. (6.60), des simulations numériques sont effectuées. Le système retenu est une sphère à l'intérieur de laquelle les diffuseurs sont disposés aléatoirement selon un potentiel de sphères dures, comme l'indique la Fig. 6.7.

La puissance absorbée  $P_{\text{abs}}$  par un diffuseur soumis à un champ exciteur  $E^{\text{exc}}$  se calcule comme [24]

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \sigma_{\text{abs}} |E^{\text{exc}}|^2. \quad (6.62)$$

Pour une onde plane incidente donnée, les différents champs excitateurs sur les diffuseurs sont déterminés par la méthode des dipôles couplés (voir chapitre 3). La puissance absorbée par le système pour l'onde plane considérée est alors

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \sigma_{\text{abs}} \sum_{j=1}^N |E_j^{\text{exc}}|^2. \quad (6.63)$$

Comme l'éclairage est incohérent, la puissance absorbée totale est alors la somme des puissances absorbées pour chaque onde plane constituant l'éclairage lambertien,

$$P_{\text{abs}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \sigma_{\text{abs}} \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^N |E_{l,j}^{\text{exc}}|^2, \quad (6.64)$$

où  $M$  est le nombre total d'ondes planes de l'éclairage. Notons au passage qu'avec l'Eq. (6.63) il est évident qu'en diffusion simple l'absorption du système ne dépend pas des corrélations du désordre. Le module du champ exciteur est en effet le même sur tous les diffuseurs. La taille du système est

donc choisie de manière à ce que l'épaisseur optique  $b_B$  (définie comme  $b_B = 2R/\ell_B$ ) soit supérieure à un pour éviter d'effectuer une comparaison triviale.

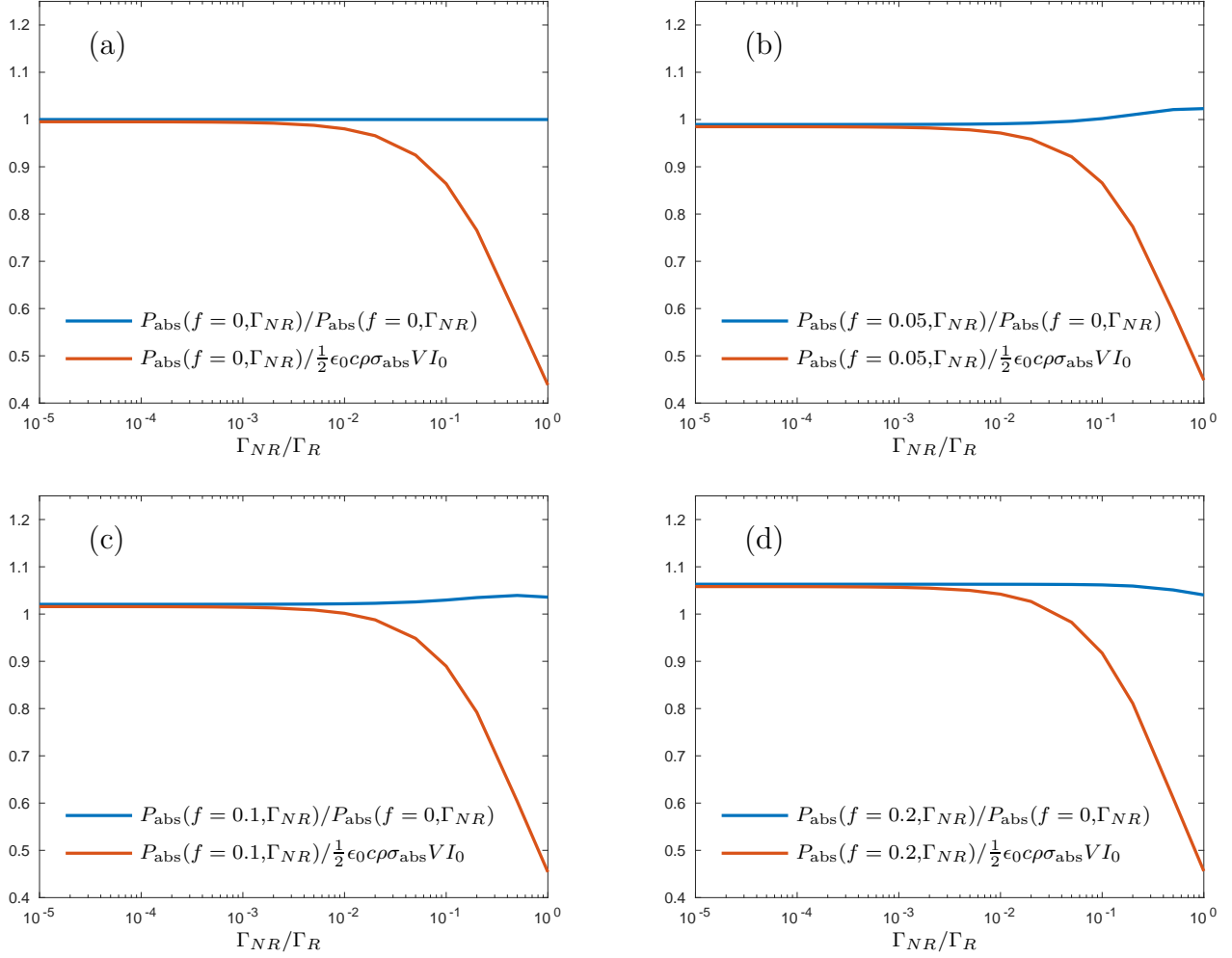
Le calcul numérique est effectué avec les paramètres présentés précédemment :  $k_0\ell_B = 50$ ,  $b_B = 3.1$ ,  $\rho = 7.5 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\Gamma_R = 10^{15} \text{s}^{-1}$  et le rayon du système est  $R = 10^{-5} \text{m}$ . L'absorption est introduite avec  $\Gamma_{NR}$ . Le nombre  $M$  d'ondes planes de l'éclairement est pris égal à 5000 de manière à avoir une discrétisation satisfaisante et un temps de calcul raisonnable.

La Fig. 6.8 présente les résultats du calcul de la puissance absorbée pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R$  allant de  $10^{-5}$  à 1. Ces calculs sont effectués pour quatre niveaux de corrélations avec une fraction volumique effective  $f$  allant de 0 à 0.2. Numériquement on observe que la puissance absorbée dépend peu du niveau des corrélations. Ces résultats suggèrent également le domaine de validité de l'approximation proposée précédemment, notamment avec la Fig. 6.8(a) où l'approximation de l'Eq. (6.51) est la plus légitime car  $f = 0$ . Cette figure indique que pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 5 \times 10^{-3}$ , ou de manière équivalente  $2R/\ell_{\text{abs}} < 1.5 \times 10^{-2}$  (avec  $\ell_{\text{abs}} = 1/\rho\sigma_{\text{abs}}$ ), la puissance absorbée est bien évaluée par l'Eq. (6.61).

Ainsi, pour les systèmes corrélés  $P_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \mu_{\text{abs}} V I_0$  pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 5 \times 10^{-3}$ , car comme expliqué dans la partie 6.3.2,  $\mu_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR})$  ne change pas d'ordre de grandeur quand  $f$  varie. Les Fig. 6.8(b,c,d) montrent donc que  $\mu_{\text{abs}}(f, \Gamma_{NR})/\mu_{\text{abs}}(f = 0, \Gamma_{NR})$  ne varie pas significativement avec  $f$  (au plus de 0.06 pour  $f = 0.2$ ) pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 5 \times 10^{-3}$ , en accord avec les prédictions de la partie 6.3.2. Toutefois, il n'a pas été possible de confronter ces évaluations numériques de  $\mu_{\text{abs}}$  avec celles de la Fig. 6.4, ces dernières ne donnant pas de résultats fiables pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 0.05$ .

## 6.5 Conclusion

En conclusion, l'absorption des ondes optiques dans des milieux désordonnés corrélés a été étudiée. Les coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$ , de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  et d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  ont été calculés pour des milieux désordonnés corrélés par une approche diagrammatique. Le coefficient  $\mu_{\text{ext}}$  a pu être déterminé numériquement et comparé aux valeurs analytiques de manière satisfaisante. Le coefficient  $\mu_{\text{abs}}$  a aussi pu être déterminé numériquement et la faible dépendance de  $\mu_{\text{abs}}$  avec le niveau de corrélation a pu être interprétée et vérifiée numériquement. Ce résultat constitue une première étape importante dans l'étude de l'absorption des ondes dans les milieux désordonnés corrélés. Une seconde étape consisterait à calculer la puissance absorbée avec une méthode de type Monte Carlo pour un éclairement sous onde plane et une géométrie plus réaliste, afin de mieux comprendre l'impact des corrélations du désordre sur la puissance absorbée.



**Figure 6.8** – Calculs numériques de la puissance absorbée pour des systèmes désordonnés corrélés. Pour évaluer l'influence des corrélations, ces puissances sont rapportées à celles du système non corrélé et à celle calculée par la méthode perturbative donnant  $P_{\text{abs}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \rho \sigma_{\text{abs}} V I_0$ , (a)  $f = 0$ , (b)  $f = 0.05$ , (c)  $f = 0.1$  et (d)  $f = 0.2$ . Ces résultats suggèrent que  $P_{\text{abs}}$  dépend peu du niveau des corrélations et que l'approximation  $P_{\text{abs}} \sim \frac{1}{2}\epsilon_0 c \mu_{\text{abs}} V I_0$  est valide pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R < 5 \cdot 10^{-3}$ . On en déduit que  $\mu_{\text{abs}}$  dépend peu des corrélations pour  $\Gamma_{NR}/\Gamma_R \ll 1$ . Paramètres :  $k_0 \ell_B = 50$ ,  $b_B = 3.1$ ,  $\rho = 7.5 \times 10^{18} \text{m}^{-3}$ ,  $\omega = 2.25 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15} \text{s}^{-1}$  et  $\Gamma_R = 10^{15} \text{s}^{-1}$ , l'intensité du l'éclairement lambertien  $I_0$  est prise égale à l'unité.

# Chapitre 7

## Corrélations spatiales du taux de désexcitation d'un émetteur fluorescent dans un milieu désordonné corrélé

### Sommaire

7.1	Introduction . . . . .	95
7.2	Grandeurs statistiques associées au taux de désexcitation . . . . .	96
7.3	Étude en régime diffusion simple . . . . .	98
7.3.1	Calcul numérique de $C_{\Gamma}$ . . . . .	98
7.3.2	Calcul analytique de $C_{\Gamma}$ . . . . .	100
7.4	Étude en régime de diffusion multiple . . . . .	102
7.5	Conclusion . . . . .	103

### 7.1 Introduction

L'imagerie est l'une des principales applications de l'étude des ondes en milieux désordonnés. La propagation des ondes dépend en effet de la structuration et des propriétés du milieu désordonné dans lequel elles se propagent. Ainsi, en analysant les ondes transmises ou réfléchies par ces milieux on peut espérer recueillir des informations permettant de déterminer leurs propriétés. Cependant la diffusion multiple altère la lisibilité des signaux et l'interprétation des mesures peut s'avérer particulièrement délicate. C'est pourquoi l'imagerie constitue une grande thématique de recherche [82] car les milieux complexes sont omniprésents à l'état naturel, les exemples les plus représentatifs étant les milieux biologiques.

Pour imager les milieux complexes, il existe plusieurs approches. Tout d'abord l'optique cohérente [*Optical Coherence Tomography* (OCT) en anglais] permet d'imager les milieux complexes, en particulier biologiques, proche de la surface car cette technique est limitée au régime de diffusion simple [1]. En régime de diffusion multiple, la tomographie optique diffuse permet d'imager les milieux en profondeur mais la résolution se dégrade très rapidement [131]. Une autre approche est d'associer les ondes optiques et acoustiques pour imager un milieu. L'imagerie acousto-optique en est un exemple prometteur. Elle permet de profiter de la bonne résolution des ultrasons et du bon contraste optique des tissus [132, 133], mais sa mise en œuvre est délicate. Plus récemment une nouvelle technique utilisant l'effet mémoire à été mise au point pour imager directement à travers un milieu diffusant [134].



Une autre possibilité pour imager les milieux complexes est d'introduire des émetteurs, par exemple des molécules fluorescentes, et de mesurer leur taux d'émission  $\Gamma$  [135]. En effet ce taux d'émission dépend fortement de l'environnement de la molécule et est proportionnel à la densité locale d'états LDOS (*Local Density of States*) [19, 136] (voir chapitre 2). Il est essentiellement dominé par les interactions de champ proche [137, 138] et dépend de l'orientation du dipôle de la source [139].

Il est intéressant de noter également que les fluctuations de LDOS ou de  $\Gamma$  sont directement reliées à la corrélation  $C_0$  [2, 140]. Introduite par B. Shapiro [141], cette corrélation non-universelle est de portée infinie et n'existe que si la source est enfouie dans le milieu. Il s'agit de la composante continue de la corrélation d'intensité  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  donnée par

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}') \rangle}{\langle I(\mathbf{r}) \rangle \langle I(\mathbf{r}') \rangle} - 1. \quad (7.1)$$

On a ainsi

$$C_0 = \left[ \frac{\langle I(\mathbf{r})I(\mathbf{r}') \rangle}{\langle I(\mathbf{r}) \rangle \langle I(\mathbf{r}') \rangle} - 1 \right]_{\text{continue}} = \frac{\langle \Gamma^2 \rangle}{\langle \Gamma \rangle^2} - 1. \quad (7.2)$$

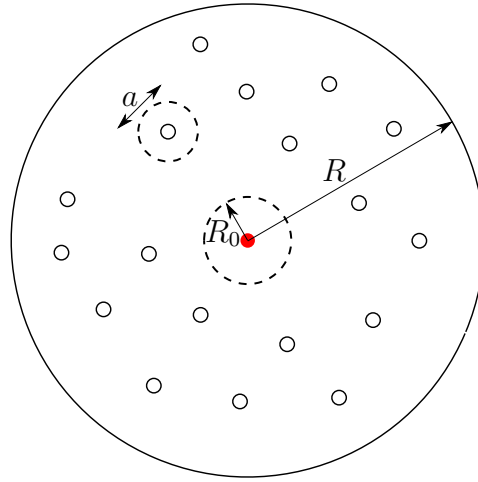
Ainsi la mesure de la statistique de  $\Gamma$  permet de remonter à cette corrélation  $C_0$  [142].

Ce chapitre propose une autre approche pour recueillir les informations sur le milieu à partir de  $\Gamma$ . Notamment à travers sa corrélation spatiale, c'est-à-dire en observant comment évolue, en moyenne,  $\Gamma$  en déplaçant la source dans le milieu. L'objectif ici est de proposer une définition d'une nouvelle corrélation, notée  $C_r$ , et de déterminer comment elle est reliée à la microstructure du milieu, en particulier aux corrélations du désordre et à l'environnement local de la source. Afin d'illustrer ces dépendances, des simulations numériques sont d'abord effectuées en régime de diffusion simple, puis interprétées par un calcul analytique. Une étude numérique est ensuite effectuée en régime de diffusion multiple.

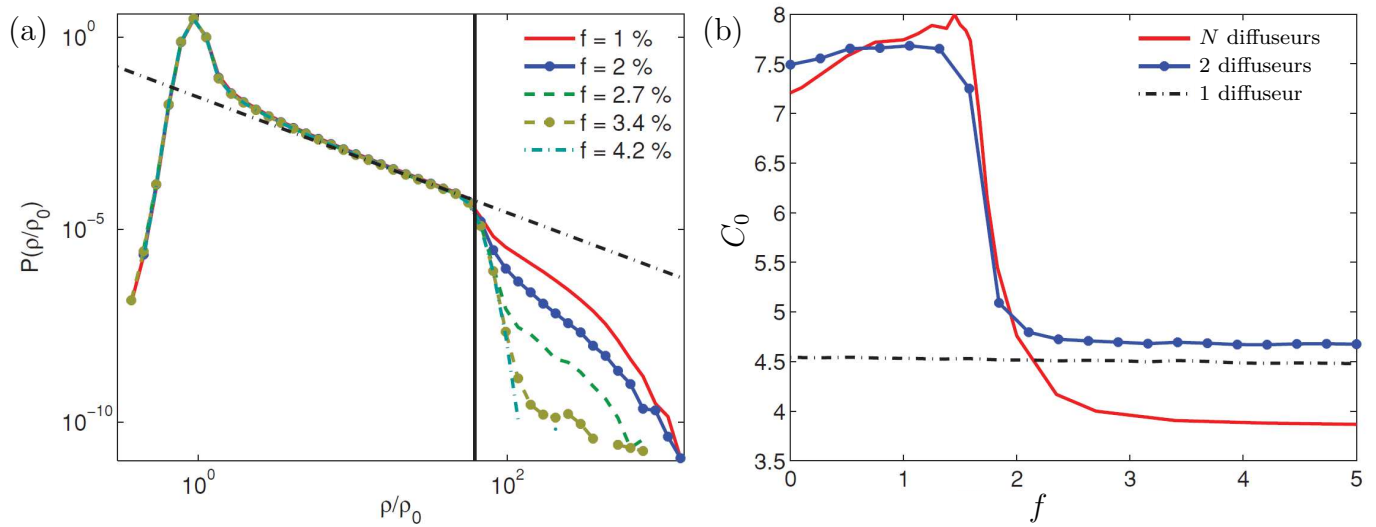
## 7.2 Grandeurs statistiques associées au taux de désexcitation

Ce travail s'appuie sur les travaux d'A. Cazé sur les fluctuations de LDOS [2]. Revenons dans un premier temps sur les principaux résultats de cette étude. Les propriétés statistiques du taux d'émission  $\Gamma$  sont étudiées pour des systèmes en dimension trois et pour des ondes vectorielles. Les systèmes considérés sont constitués de  $N$  particules diélectriques. Aussi pour étudier l'influence des corrélations, un potentiel de sphères dures est introduit entre les diffuseurs. Ils sont ainsi habillés d'un volume fictif  $V_0 = 4/3\pi(a/2)^3$  où  $a$  est le rayon d'exclusion du potentiel de sphères dures dont la valeur est choisie arbitrairement, et qui peut être bien plus grande que le rayon réel des diffuseurs. Le niveau des corrélations est évalué avec la fraction volumique effective  $f$  définie comme le volume fictif occupé par les diffuseurs « habillés » rapporté au volume total  $V$ ,  $f = NV_0/V$ . La source est un dipôle électrique placé dans le milieu. La géométrie du système est présentée sur la Fig. 7.1.

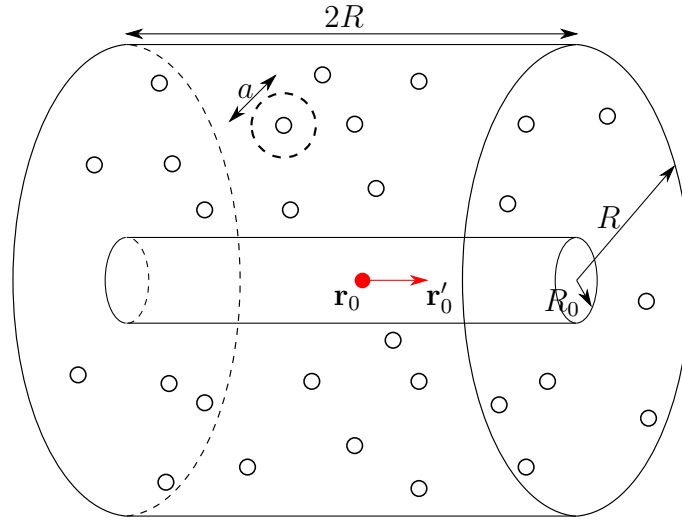
Les distributions du taux de désexcitation sont obtenues en calculant  $\Gamma$  pour un grand nombre de configurations du désordre. La Fig. 7.2 présente des distributions de LDOS pour plusieurs fractions volumiques effectives  $f$ . On observe que plus  $f$  est grand plus la largeur de la distribution diminue. Ce résultat peut s'interpréter simplement, comme une domination du taux d'émission par les interactions de champ proche entre la source et les diffuseurs. Lorsque  $R_0$  et  $a$  sont du même ordre de grandeur, la source interagit avec un seul diffuseur à une distance  $R_0$ . Ceci a pour effet de limiter les valeurs maximales de  $\Gamma$  et de réduire la largeur de sa distribution.



**Figure 7.1** – Schéma de la géométrie du système pour étudier les fluctuations de  $\Gamma$  dans la Réf. [2]. Les cercles représentent les diffuseurs. À cause du potentiel de sphères dures fictif imposé lors de la génération du milieu, ils ne peuvent pas s'approcher à moins d'une distance  $a$  les uns des autres. Le disque rouge représente la source, elle est entourée d'un domaine d'exclusion de rayon  $R_0$  que les diffuseurs ne peuvent pas pénétrer.



**Figure 7.2** – (a) Distribution statistiques de LDOS (proportionnelle au taux d'émissions  $\Gamma$ ) pour différentes fractions volumiques  $f$  [2]. (b)  $C_0$  en fonction de la fraction volumique. La largeur des distributions, de manière équivalente  $C_0$ , dépend de  $f$ . Plus  $f$  est grand, moins cette distribution est large et plus  $C_0$  est petit.



**Figure 7.3** – Géométrie du système pour étudier les corrélations spatiales de  $\Gamma$ . La source est initialement positionnée en  $\mathbf{r}_0$  et est déplacée en plusieurs positions  $\mathbf{r}'_0$ . Les diffuseurs sont positionnés de manière désordonnée mais ne peuvent s'approcher les uns des autres à une distance inférieure à  $a$ . De même ils ne peuvent approcher l'axe central du système d'une distance inférieure à  $R_0$ .

L'étude effectuée dans ce chapitre s'inscrit dans la continuité de ces travaux. Son objectif est de déterminer comment évolue le taux de désexcitation d'une source en changeant sa position dans le milieu. L'approche la plus simple consiste à considérer que la source se déplace en ligne droite. La géométrie cylindrique est alors la plus adaptée pour le milieu, elle permet notamment d'approcher l'invariance par translation dans la direction de déplacement de la source. Le milieu désordonné est donc compris entre deux cylindres concentriques, l'un de rayon  $R_0$  où la source se déplace et l'autre de rayon  $R$  définissant le milieu diffusant (voir Fig. 7.3). La grandeur statistique d'intérêt est alors la corrélation spatiale  $C_\Gamma$ , indiquant comment sont corrélées deux valeurs de  $\Gamma$  pour deux positions différentes de la source. Sa définition est donnée par

$$C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \frac{\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle}{\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle \langle \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle} - 1, \quad (7.3)$$

avec évidemment  $C_0 = C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)$ . Les travaux des parties suivantes cherchent à déterminer les informations qu'il est possible de recueillir sur le milieu désordonné à partir de  $C_\Gamma$ .

## 7.3 Étude en régime diffusion simple

### 7.3.1 Calcul numérique de $C_\Gamma$

Afin d'identifier les dépendances de  $C_\Gamma$  en fonction des paramètres du milieu et d'aiguiller son calcul analytique, une étude numérique est effectuée en régime de diffusion simple. Le système est constitué de  $N$  particules diélectriques sphériques de petite taille devant la longueur d'onde afin de pouvoir les traiter dans l'approximation dipolaire électrique. La réponse de ces diffuseurs à une onde vectorielle est modélisée par une polarisabilité  $\alpha(\omega)$  donnée par

$$\alpha(\omega) = -\frac{6\pi\Gamma_R c^3}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma_R \omega^3 / \omega^2}. \quad (7.4)$$

Il s'agit d'une polarisabilité de type oscillateur résonant de fréquence de résonance  $\omega_0$  et de largeur spectrale  $\Gamma_R$ .  $\omega_0$  et  $\Gamma_R$  dépendent des propriétés géométriques et diélectriques des diffuseurs, c'est-à-dire de leur volume et constante diélectrique  $\epsilon(\omega)$  comme montré dans le chapitre 2.

Le taux de désexcitation  $\Gamma$  est calculé de la même manière que la LDOS dans le chapitre 3. Le champ produit par un dipôle source  $\mathbf{p}$  est déterminé par la méthode des dipôles couplés en résolvant le système de  $N$  équations suivant

$$\mathbf{E}_j^{\text{exc}} = \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{p} + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_l, \omega) \mathbf{E}_l^{\text{exc}}, \quad (7.5)$$

où  $\mathbf{r}_j$  est la position du diffuseur  $j$ ,  $\mathbf{r}_s$  la position de la source,  $\mathbf{E}_j^{\text{exc}}$  le champ exciteur s'appliquant sur le diffuseur  $j$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0$  est le tenseur de Green du vide. Ce tenseur est solution de l'équation vectorielle (avec condition d'onde sortante à l'infini)

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - k_0^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7.6)$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$  est le tenseur identité en dimension trois. L'expression de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0$  est

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{ik_0 r - 1}{k_0^2 r^2} (\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - 3\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right] \frac{\exp(ik_0 r)}{4\pi r}, \quad (7.7)$$

où  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\mathbf{u} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  et  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ . Il est alors possible de calculer le champ partout dans l'espace et en particulier à la position de la source. En moyennant ce champ sur les différentes orientations du dipôle source, la LDOS  $\rho(\mathbf{r}_s, \omega)$  est obtenue (voir l'Eq. (2.12) du chapitre 2)

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2\omega}{\pi c^2} \text{Im} \left[ \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) \right]. \quad (7.8)$$

La LDOS dans le vide  $\rho_0$  est calculée en remplaçant  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  par  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0$  dans cette dernière équation

$$\rho_0 = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (7.9)$$

La LDOS normalisée s'écrit

$$\frac{\rho(\mathbf{r}_s, \omega)}{\rho_0} = \frac{\text{Im} \left[ \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, \omega) \right]}{k_0/2\pi}, \quad (7.10)$$

de manière équivalente

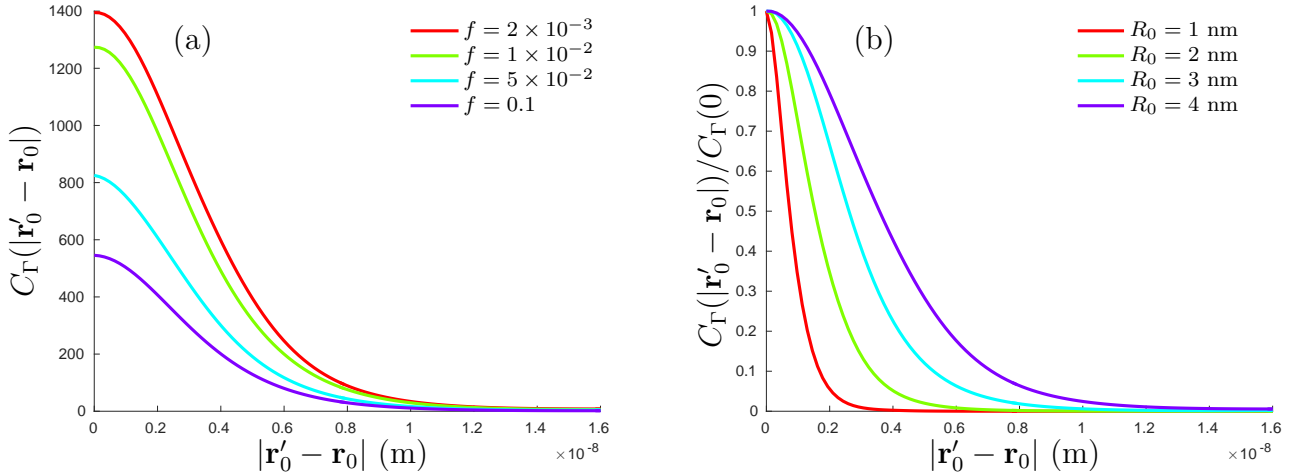
$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\text{Im} \left[ \text{Tr} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, \omega) \right]}{k_0/2\pi}, \quad (7.11)$$

où  $\Gamma_0$  est le taux d'émission de la source dans le vide.

En lien avec les travaux sur la corrélation  $C_0$  effectués par A. Cazé [2], les influences du rayon d'exclusion  $R_0$  et des corrélations de positions entre diffuseurs, mesurées par  $f$ , sont d'abord envisagées. Les paramètres numériques sont tout d'abord choisis pour que le système soit largement dilué et en diffusion simple :  $b_B = R/\ell_B = 7.96 \times 10^{-2}$  et produit  $k_0 \ell_B = 131$ . Aussi toutes les longueurs sont petites devant la longueur d'onde  $\lambda = 942$  nm, ce qui permettra de faire l'approximation de champ proche dans la section suivante, simplifiant ainsi significativement le calcul analytique de  $C_\Gamma$ .

La Fig. 7.4(a) montre les tracés de  $C_\Gamma$  pour plusieurs fractions volumiques effectives allant de  $f = 2 \times 10^{-3}$  à  $f = 0.1$  et avec  $R_0 = 4$  nm. Le cas non corrélé ( $f = 0$ ), n'est pas retenu pour des raisons numériques. En effet, dans ce cas, les distances entre les diffuseurs peuvent être très proches ce qui

a pour effet de faire diverger rapidement la fonction de Green. On remarque que l'amplitude de  $C_\Gamma$  diminue lorsque  $f$  augmente, cette observation étant cohérente avec les résultats obtenus pour  $C_0$ . En particulier, sur ces tracés,  $C_0$  se lit en  $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0| = 0$  par définition. La Fig. 7.4(b) montre les tracés de  $C_\Gamma$  normalisés pour plusieurs rayons d'exclusion  $R_0$  et avec  $f = 2 \times 10^{-3}$ . Cette figure tend à montrer que la largeur de  $C_\Gamma$  est proportionnelle à  $R_0$ . De manière intéressante, il semble donc que les influences de  $f$  et  $R_0$  puissent être séparées, c'est-à-dire que  $R_0$  donne essentiellement la largeur, alors que  $f$  n'intervient que dans l'amplitude de  $C_\Gamma$ .



**Figure 7.4** – Tracés de  $C_\Gamma$  en régime de diffusion simple, avec  $k_0\ell_B = 131$  et  $b_B = 7.96 \times 10^{-2}$ . Paramètres :  $\omega = 2 \times 10^{15}$  Hz,  $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$  Hz,  $\Gamma_R = 1 \times 10^{13}$  Hz,  $\rho = 3.78 \times 10^4 \mu\text{m}^{-3}$  et  $R = 75$  nm. (a)  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  pour différentes valeurs de compacités  $f$  avec  $R_0 = 4$  nm. L'amplitude de  $C_\Gamma$  diminue quand  $f$  augmente. (b) Tracé de  $C_\Gamma(|\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0|)$  pour plusieurs rayons d'exclusion avec  $f = 2 \times 10^{-3}$ . La largeur de  $C_\Gamma$  est proportionnelle à  $R_0$ .

La partie suivante propose un calcul analytique de  $C_\Gamma$  permettant de confirmer les dépendances en  $f$  et  $R_0$  qui ont été observées numériquement.

### 7.3.2 Calcul analytique de $C_\Gamma$

Pour un système en régime de diffusion simple on peut considérer que l'interaction entre la source et un diffuseur est indépendante des autres diffuseurs.  $\Gamma$  est alors donné par

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \sum_{j=1}^N 2\pi k_0 \text{Im} \left[ \alpha(\omega) \text{Tr} \left( \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0, \omega)^2 \right) \right], \quad (7.12)$$

où  $\mathbf{r}_0$  est la position de la source et  $\mathbf{r}_j$  la position du diffuseur  $j$ . En développant l'expression de  $\vec{\mathbf{G}}_0$  il vient

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \sum_{j=1}^N 2\pi k_0 \text{Im} \left\{ \alpha \frac{\exp(2ikr_j)}{(4\pi r_j)^2} \left[ 2 - \frac{10}{(kr_j)^2} + \frac{6}{(kr_j)^4} + i \left( \frac{4}{kr_j} - \frac{12}{(kr_j)^3} \right) \right] \right\}, \quad (7.13)$$

où  $r_j = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0|$ .

L'approximation de champ proche s'applique pour les distances très petites devant la longueur d'onde  $\lambda$ . Elle revient à ne conserver que le terme de plus haut degré en  $r^{-1}$  et négliger tous les autres. L'expression de  $\Gamma$  devient alors

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \frac{3 \text{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \sum_{j=1}^N \frac{1}{r_j^6}. \quad (7.14)$$

La corrélation  $C_\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est définie comme

$$C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \frac{\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle}{\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle \langle \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle} - 1. \quad (7.15)$$

Le calcul de  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  est effectué dans la géométrie présentée précédemment.  $\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle$  et  $\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle$  se calculent comme

$$\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle = \int \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) P(\{\mathbf{r}_j\}) \prod_{j=1}^N d^3 \mathbf{r}_j, \quad (7.16)$$

$$\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle = \int \Gamma(\mathbf{r}_0) P(\{\mathbf{r}_j\}) \prod_{j=1}^N d^3 \mathbf{r}_j, \quad (7.17)$$

où  $P(\{\mathbf{r}_j\})$  est la densité de probabilité associée à la configuration  $\{\mathbf{r}_j\}$ . En prenant pour  $\Gamma$  l'expression de l'Eq. (7.14),  $\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle$  se développe comme

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0^2} \right\rangle &= \int \left( 1 + \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^6} \right) \left( 1 + \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_j|^6} \right) P(\{\mathbf{r}_j\}) \prod_{j=1}^N d^3 \mathbf{r}_j \\ &= \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0)}{\Gamma_0} \right\rangle + \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0} \right\rangle - 1 + \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \right)^2 \int \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_j|^6} \right)^2 \prod_{j=1}^N d^3 \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (7.18)$$

En développant le produit dans l'intégrale de cette dernière équation, il vient :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0)}{\Gamma_0} \right\rangle + \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0} \right\rangle - 1 + N \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \right)^2 \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^6} P(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \\ &\quad + N(N-1) \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \right)^2 \int_{V^2} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|^6} P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

On a  $P(\mathbf{r}) = 1/V$  et  $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = [1 + h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]/V^2$ , où  $h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est la fonction de corrélation de paire introduite dans le chapitre 2. En notant  $\rho = N/V$  la densité et en remarquant que

$$\rho \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6} d^3 \mathbf{r} = \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0)}{\Gamma_0} \right\rangle - 1, \quad (7.20)$$

$\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle$  se réécrit comme

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0) \Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}_0)}{\Gamma_0} \right\rangle \left\langle \frac{\Gamma(\mathbf{r}'_0)}{\Gamma_0} \right\rangle + \rho \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \right)^2 \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^6} d^3 \mathbf{r} \\ &\quad + \rho^2 \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)]}{4\pi k_0^3} \right)^2 \int_{V^2} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|^6} h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Finalement en considérant  $\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle = \langle \Gamma(\mathbf{r}'_0) \rangle$  et en supposant une parfaite invariance par translation,  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  devient

$$\begin{aligned} C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) &= \rho \left( \frac{3 \operatorname{Im}[\alpha(\omega)] \Gamma_0}{4\pi k_0^3 \langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle} \right)^2 \left[ \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^6} d^3 \mathbf{r} \right. \\ &\quad \left. + \rho \int_{V^2} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|^6} h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Pour les faibles fractions volumiques,  $h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est approximée de la manière suivante

$$h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.23)$$

où  $a$  est le rayon d'exclusion du potentiel de sphères dures. Cette expression pour la fonction de corrélation de paire est fautive en toute rigueur, mais constitue une bonne approximation pour les faibles corrélations du désordre [29]. L'expression de  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  est alors

$$C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \rho \left( \frac{\text{Im}[\alpha(\omega)]\Gamma_0}{4\pi \langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle k_0^3} \right)^2 \left[ \int_V \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^6} - \rho \int_V \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|^6} \left( \int_{V(\mathbf{r}_1)} \frac{d^3\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|^6} \right) d^3\mathbf{r}_1 \right], \quad (7.24)$$

où  $V(\mathbf{r}_1)$  est le volume d'exclusion pour un diffuseur placé en  $\mathbf{r}_1$ . Dans la limite des faibles fractions volumiques on peut considérer que  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|$  varie peu avec  $\mathbf{r}_2$  sur  $V(\mathbf{r}_1)$  et donc faire l'approximation  $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_0|^6 \approx 1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_0|^6$  dans l'Eq. (7.24). En remarquant que  $f = \rho V_0$  l'expression de  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  est alors

$$C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \frac{9}{32}\rho \left\{ \frac{\text{Im}[\alpha(\omega)]\Gamma_0}{4\pi k_0^3 \langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle} \right\}^2 (1-f) \int_V \frac{d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^6 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0|^6}. \quad (7.25)$$

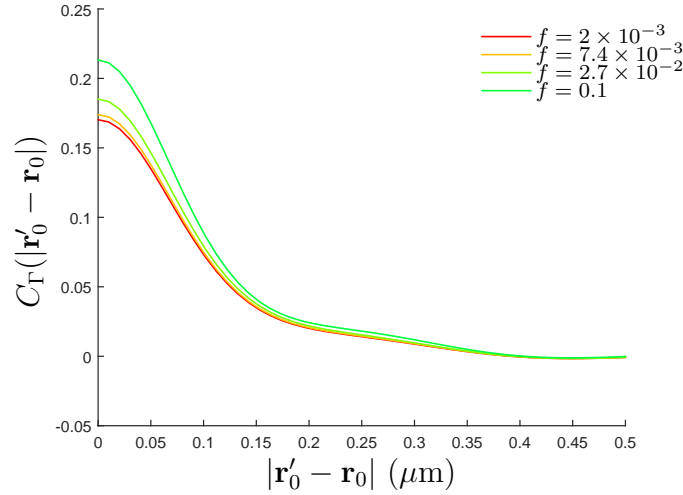
L'intégrale de l'Eq. (7.25) se calcul analytiquement, l'expression obtenue est particulièrement lourde. En prenant la limite  $R_0 \ll R$  l'expression de  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  est alors grandement simplifiée :

$$\boxed{C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0) = \frac{9}{32}\rho(1-f) \left( \frac{\text{Im}[\alpha(\omega)]\Gamma_0}{\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle k_0^3} \right)^2 \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0|^2 + 28R_0^2}{R_0^3(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0|^2 + 4R_0^2)^4}}. \quad (7.26)$$

où  $\langle \Gamma(\mathbf{r}_0) \rangle / \Gamma_0 = 1 + 3/32\rho \text{Im}[\alpha(\omega)]/(k_0^3 R_0^3)$ . La largeur à mi-hauteur  $\ell_{1/2}$  de  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  se calcule et vaut  $\ell_{1/2} = 0.89R_0$ . Ainsi dans ce système, la mesure des corrélations de  $\Gamma$  avec la position de la source donne une information sur l'environnement local de celle-ci, plus précisément la distance  $R_0$  qui mesure la distance au plus proche voisin. L'observation faite à partir des simulations numériques est donc retrouvée.  $R_0$  influence la largeur et l'amplitude de  $C_\Gamma$ , alors que  $f$  ne modifie que l'amplitude de  $C_\Gamma$ . Ce résultat est toutefois restreint dans cette analyse au régime de diffusion simple.

## 7.4 Étude en régime de diffusion multiple

La même étude est effectuée en régime de diffusion multiple. Le produit  $k_0\ell_B$  vaut 4.4 et l'épaisseur optique  $b_B$  vaut 2.5. La Fig.7.5 montre que, grâce aux interactions de champ proche, la largeur de  $C_\Gamma$  est toujours proportionnelle à  $R_0$ . En revanche la dépendance aux corrélations est inversée par rapport au cas de la diffusion simple. Quand la fraction volumique effective  $f$  augmente l'amplitude de  $C_\Gamma$  augmente aussi. L'interprétation de ces résultats est nettement plus complexe que dans le cas du régime de diffusion simple et nécessite des investigations supplémentaires qui vont au-delà du premier travail exploratoire mené dans le cadre de cette thèse.



**Figure 7.5** –  $C_\Gamma(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'_0)$  pour différentes valeurs de compacités  $f$  en régime de diffusion multiple  $k_0 \ell_B = 4.4$  et  $b_B = 2.5$ . Paramètres :  $\omega = 3 \times 10^{15}$  Hz,  $\Gamma_R = 10^9$  Hz,  $\rho = 12 \mu\text{m}^{-3}$ ,  $R_0 = 100$  nm et  $R = 1.1 \mu\text{m}$ .

## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle corrélation  $C_\Gamma$  a été introduite. Elle rend compte de la corrélation du taux de désexcitation pour deux positions d'un dipôle source dans le milieu. Cette corrélation renseigne sur deux caractéristiques importantes du milieu désordonné. Elle renseigne d'abord sur l'environnement local de la source par sa largeur et sur le niveau de corrélation entre les hétérogénéités du milieu par son amplitude. L'étude en régime de diffusion multiple est plus difficile à interpréter. Dans ce régime la largeur de  $C_\Gamma$  semble toujours renseigner sur l'environnement local de la source mais sa dépendance aux corrélations du désordre reste à comprendre. Néanmoins la corrélation  $C_\Gamma$  se révèle être une grandeur potentiellement intéressante pour imager les milieux complexes à des échelles inférieures à la longueur d'onde.





# Chapitre 8

## Conclusion

En conclusion, la propagation des ondes en milieu désordonné a été étudiée dans différents régimes. Le chapitre 2 a posé le cadre général de ces travaux de thèse en rappelant les principes et outils fondamentaux. Les concepts élémentaires comme l'équation de Helmholtz, la fonction de Green et la figure de speckle ont été rappelés. Le modèle retenu pour la description du désordre a été présenté, dans l'ensemble du manuscrit il s'agit de diffuseurs ponctuels disposés dans le vide. Les équations fondamentales régissant la propagation des ondes en milieux désordonnés ont été présentées, notamment avec les équations de Dyson, de Bethe-Salpeter et l'Équation de Transfert Radiatif. Ces équations ont été introduites par l'approche diagrammatique, qui constitue l'un des outils théoriques les plus utilisés lors de ces travaux de thèse.

Dans le chapitre 3, un régime très particulier de la propagation des ondes a été étudié. Il s'agit de la localisation d'Anderson, c'est-à-dire la capacité pour un milieu suffisamment hétérogène de confiner les ondes dans une certaine région de l'espace. L'étude proposée a été effectuée en système bidimensionnel ouvert pour des ondes en polarisation TE et s'est distinguée des approches traditionnelles car elle s'est intéressée à une réalisation unique du désordre. Cette approche est légitime puisqu'en optique il est possible de résoudre le speckle. L'étude s'est inspirée de résultats pour la géométrie quasi-1D, décrit par la théorie des matrices aléatoires. Dans cette géométrie, pour une réalisation du désordre, la transmission est assurée par un nombre fini de modes, dont la pénétration dans le milieu est exponentielle. Ainsi pour des systèmes asymptotiquement grands, un mode domine exponentiellement tous les autres en sortie. Le signal transmis est donc donné par un seul mode et son allure est invariante avec les conditions d'illumination. Le but de ce chapitre a été de déterminer si cette manifestation de la localisation était encore valide pour un système ouvert en dimension deux. Une réalisation particulière du désordre a été considérée, pour différentes conditions d'illumination la figure de speckle a été calculée. Les deux régimes se sont alors nettement différenciés. En régime localisé, l'allure de la figure de speckle n'a pas changé, alors qu'elle a varié en régime diffusif. Pour quantifier cette invariance, une fonction de similarité a été proposée. Celle-ci est définie de manière à ce qu'elle vaille un lorsque l'allure de la figure de speckle ne change pas et soit différente de un lorsqu'elle varie. Cette fonction a été proposée comme un nouveau critère pour la localisation d'Anderson. À partir de ces résultats, une collaboration avec Yong Chen de l'ENS, pour la réalisation d'échantillons, et Valentina Krachmalnikoff de l'Institut Langevin, pour les mesures optiques, a été lancée afin de valider expérimentalement ce critère. Ces résultats fournissent également un excellent point de départ pour l'éventuelle mise en évidence de la localisation d'Anderson pour des ondes vectorielles en dimension trois, qui constitue la suite naturelle de ces travaux.

En régime dilué, les travaux effectués dans ce manuscrit ont porté sur l'influence des corrélations du désordre sur la propagation des ondes. Pour ce faire, une classe particulière de milieux désordonnés corrélés a été introduite dans le chapitre 4. Il s'agit des milieux hyperuniformes pour lesquels le facteur

de structure est nul sur toute une zone du réseau réciproque. Une méthode de génération numérique très efficace de ces milieux a été présentée et a permis de générer des configurations pour l'étude des propriétés optiques. La propagation des ondes dans ces milieux a été abordée dans le chapitre 5. L'importance des corrélations du désordre a alors été mise en évidence de manière spectaculaire. En effet, l'introduction d'un ordre partiel dans le milieu a permis de passer d'un milieu opaque à un système transparent sans changer ni la taille de la structure ni la densité de diffuseurs. Le ressort principal de cet effet repose sur les interférences entre les ondes émises par les différents diffuseurs du milieu. En diffusion simple, l'intensité émise dans une direction particulière est donnée par le facteur de structure. Ainsi, si celui-ci est nul dans la direction considérée, l'intensité émise dans cette direction est aussi nulle. C'est ce qui fait l'intérêt des milieux hyperuniformes, le milieu est alors transparent. L'apport principal de ces travaux a été de montrer que la transparence résiste à la diffusion multiple. Il a été montré, à l'aide des diagrammes et numériquement, que cette approximation est valide lorsque l'épaisseur optique est petite devant le produit  $k_0 \ell_B$ . Ce travail ouvre la voie pour l'étude d'autres propriétés optiques, comme par exemple l'indice effectif, qui pourrait présenter des caractéristiques remarquables. La compréhension et l'étude des bandes interdites photoniques constitue également une suite pertinente pour ces travaux.

Vu l'importance des corrélations sur les propriétés de diffusion, il était légitime de s'intéresser aux propriétés d'absorption, notamment à la dépendance du coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  avec les corrélations du désordre. Les travaux du chapitre 6 ont reposé sur un approfondissement des concepts présentés dans le chapitre 2, permettant d'obtenir des expressions pour les coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  et de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$  tenant compte des corrélations du désordre et vérifiant la conservation de l'énergie pour des systèmes non absorbants. Ces travaux ont montré que le coefficient d'absorption  $\mu_{\text{abs}}$  dépendait peu des corrélations du désordre. Comparé aux coefficients d'extinction  $\mu_{\text{ext}}$  et de diffusion  $\mu_{\text{sca}}$ , ce résultat peut paraître étonnant. Il s'explique, dans une approche diagrammatique, par le fait que la principale correction introduite par les corrélations est la même pour  $\mu_{\text{ext}}$  et  $\mu_{\text{sca}}$ . Si bien qu'elle est absente de  $\mu_{\text{ext}} - \mu_{\text{sca}}$  et donc de  $\mu_{\text{abs}}$ . Les travaux de ce chapitre représentent une première étape dans l'étude de l'absorption dans les milieux désordonnés corrélés. La suite logique consiste maintenant à calculer la puissance absorbée avec une méthode de type Monte Carlo pour un éclairage sous onde plane et dans une géométrie plus réaliste, afin de mieux comprendre l'impact des corrélations du désordre sur la puissance absorbée.

Enfin dans le chapitre 7, une corrélation particulière a été étudiée, celle du taux d'émission d'un émetteur ponctuel calculé en différents points. Les travaux présentés dans ce chapitre ont pris comme point de départ les études sur la statistique du taux d'émission. Elle est en effet révélatrice de l'environnement local de l'émetteur et des corrélations dans le milieu. Les travaux de ce chapitre ont constitué un prolongement de ces études et se sont intéressés aux variations du taux d'émission avec la position de l'émetteur. Ces travaux ont conduit à la définition d'une fonction de corrélation spatiale  $C_{\Gamma}$ . Cette fonction se révèle potentiellement intéressante pour l'imagerie sub-longueur d'onde car ses dépendances avec l'environnement local de la source et des corrélations du désordre peuvent être découplées. La corrélation  $C_{\Gamma}$  se révèle donc être une grandeur potentiellement intéressante pour imager les milieux complexes à des échelles inférieures à la longueur d'onde.

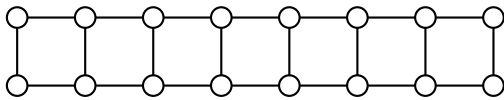
# Annexe A

## Théorie auto-cohérente et longueur de localisation pour des ondes scalaires en deux dimensions

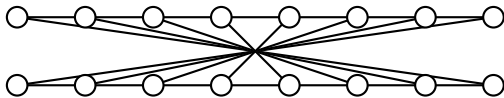
### A.1 Théorie auto-cohérente construite à partir d'une approche diagrammatique

Le principe de la théorie auto-cohérente est d'établir une équation de diffusion pour l'intensité lumineuse pour un système hors du régime dilué [143–145]. Elle consiste à établir deux équations couplées. La première est une équation de diffusion pour l'intensité  $u$ , la seconde est une équation pour le coefficient de diffusion dépendant de  $u$ . Cette annexe montre le calcul établissant ces deux équations en deux dimensions pour des ondes scalaires dans un milieu infini, il peut se généraliser pour un milieu de taille finie [145].

Dans la suite on considère deux type de diagrammes, tout d'abord les diffusons :



les diffusons correspondent à l'approximation de l'échelle. L'autre type de diagrammes sont les coeperons (aussi dénommés diagrammes croisés au maximum), ils se représentent de la manière suivante



En ne considérant que les diagrammes diffusons et coeperons, l'équation de Bethe-Salpeter est donnée par

$$\begin{aligned} \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle &= \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_0) \rangle \\ &+ \int \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) \rangle \Gamma(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) \langle G(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_0) \rangle \langle G^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_0) \rangle d^2\mathbf{r}'_1 d^2\mathbf{r}'_2 d^2\mathbf{r}_3 d^2\mathbf{r}_4, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $\Gamma = \Gamma_C + \Gamma_D$ ,  $\Gamma_C$  pour la contribution des coeperons et  $\Gamma_D$  pour celle des diffusons. On a de plus  $\Gamma_C = \Gamma_D$ . Pour un milieu éclairé par un dipôle source placé en  $\mathbf{r}_0$ , l'intensité  $u$  s'exprime avec la

fonction de Green dans le cas d'un dipôle source positionné en  $\mathbf{r}_0$  comme

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mu_0 \omega^2 p|^2 \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Pour la suite il est utile d'introduire la densité d'énergie  $u_D$  obtenue dans le cadre de l'approximation de l'échelle.  $u_D$  satisfait l'équation de diffusion suivante

$$-D_B \Delta u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (\text{A.3})$$

où  $A = |p|^2 \mu_0 \omega^3 / 8$  et  $D_B = c \ell_B / 2$  est le coefficient de diffusion de Boltzmann. L'intensité est alors redéfinie comme

$$u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{4k}{c} \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle, \quad (\text{A.4})$$

et satisfait l'équation de diffusion

$$-D_B u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (\text{A.5})$$

La relation entre  $\Gamma_D$  et  $u_D$  est

$$\Gamma_D = \frac{4\omega}{\ell_B^2} u_D. \quad (\text{A.6})$$

Une manière d'introduire les interférences pour le calcul de l'intensité est de considérer les diagrammes suivants [145]

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2) \Gamma_C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2, \quad (\text{A.7})$$

$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$  est une boîte de Hikami [146]. Un exemple d'un tel diagramme est représenté sur la Fig. A.1, sur cette figure les deux chemins de diffusion arrivent par la gauche et sont échangés au niveau de la boîte de Hikami par un cooperon.  $H$  est un objet local non nul seulement dans le cas où  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}'$  et  $\mathbf{r}_2$  ne sont pas éloignés de plus de  $\ell_B$  les uns des autres. Comme  $\Gamma_C = \Gamma_D$ , dans l'Eq. (A.7)  $\Gamma_C$  est remplacé par  $\Gamma_D$ .  $\Gamma_D$  peut être développé en série et en ne conservant que le premier ordre il devient

$$\Gamma_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \simeq \left( 1 + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}) \cot \nabla_{\mathbf{r}} \right) \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{A.8})$$

Après manipulation [145],

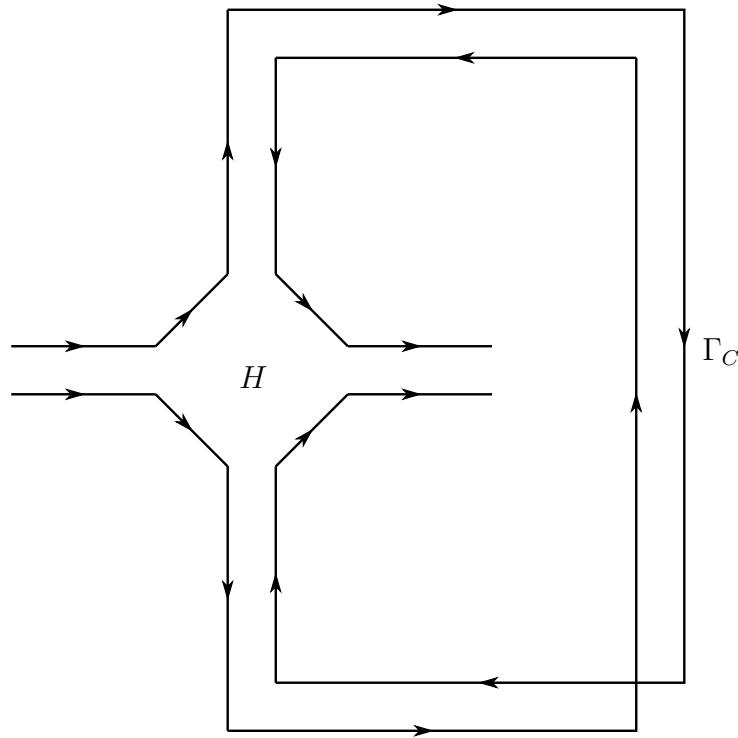
$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( 1 - \frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right) \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{A.9})$$

Dans l'annexe A de la Réf. [147] il est montré que pour  $\mathbf{q}_i$  petit devant  $1/\ell^*$  et  $1/k\ell^*$  petit,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}', \mathbf{q}_2) = N_H \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}'+\mathbf{q}_2, 0} (2q^2 - 3\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}' - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q} - 3\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}' - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q} - 6\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2), \quad (\text{A.10})$$

où  $N_H = \ell_B^5 / 32k^3$ . En prenant la transformée de Fourier inverse sur  $\mathbf{q}_1$  et  $\mathbf{q}_2$ , puis en intégrant sur  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ ,

$$H(\mathbf{q}) = \frac{D_B \ell_B^4}{8ck^3} q^2, \quad (\text{A.11})$$



**Figure A.1** – Diagramme permettant d'introduire les interférences dans le calcul de l'intensité. Les deux chemins de diffusion arrivent par la gauche et sont échangés au niveau de la boîte de Hikami  $H$  par un cooperon  $\Gamma_C$ .

en notant que  $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = H(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  par invariance par translation. La transformée de Fourier de  $X$  sur  $\mathbf{r}'$  devient maintenant

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = -\frac{D_B \ell_B^4}{8ck^3} ((i\mathbf{q})^2 + i\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (\text{A.12})$$

Finalement en prenant la transformée de Fourier inverse

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{D_B \ell_B^4}{8ck^3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')]. \quad (\text{A.13})$$

$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  peut-être réécrit

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{4\omega}{\ell_B^2} \int u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 \quad (\text{A.14})$$

$$+ \left( \frac{4\omega}{\ell_B^2} \right)^2 \int u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) u_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_3 d^2 \mathbf{r}_4. \quad (\text{A.15})$$

L'opérateur  $-D_B \Delta$  est appliqué

$$\begin{aligned} -D_B \Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -D_B \Delta_{\mathbf{r}} u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{4\omega}{\ell_B^2} \int D_B \Delta_{\mathbf{r}} u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 \\ &- \left( \frac{4\omega}{\ell_B^2} \right)^2 \int D_B \Delta_{\mathbf{r}} u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) u_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_3 d^2 \mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

En se rappelant  $-D_B \Delta_{\mathbf{r}} u_D = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , il vient :

$$\begin{aligned} -D_B \Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{4\omega}{\ell_B^2} \int X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_2 \\ &+ \left( \frac{4\omega}{\ell_B^2} \right)^2 \int X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) u_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_2 d^2 \mathbf{r}_3 d^2 \mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Le résultat de l'Eq. (A.13) est maintenant utilisé

$$\begin{aligned} -D_B \Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{4\omega}{\ell_B^2} \int \frac{D_B \ell_B^4}{8ck^3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_2 \\ &\quad - \left( \frac{4\omega}{\ell_B^2} \right)^2 \int \frac{D_B \ell_B^4}{8ck^3} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)] u_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) u_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Après simplification,

$$\begin{aligned} -D_B \Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}'] - \frac{D_B \ell_B^2}{2k^2} \nabla_{\mathbf{r}} \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \left[ u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\omega}{\ell_B^2} \int u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) u_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}_3 d^2 \mathbf{r}_4 \right], \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est reconnu dans le membre de droite, ainsi il est finalement obtenu

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \left[ \left( D_B - \frac{D_B \ell_B^2}{2k^2} \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \right] u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A.20})$$

Cela conduit à

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \left[ \left( D_B - \frac{2D_B c}{k} u_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right) \nabla_{\mathbf{r}} \right] u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A.21})$$

Le principe d'auto-consistance est maintenant appliqué, ce qui signifie que  $u_D$  est remplacé par  $u$  dans l'Eq. (A.21). Sur la Fig. A.1, cela revient à remplacer  $\Gamma_C$  par  $u$ . Un coefficient de diffusion  $D(\mathbf{r})$  peut être défini comme

$$D(\mathbf{r}) = D_B \left( 1 - \frac{2c}{k} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right), \quad (\text{A.22})$$

pouvant se réécrire

$$\frac{1}{D(\mathbf{r})} = \frac{1}{D_B} \left( 1 + \frac{2c}{k} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right). \quad (\text{A.23})$$

Par invariance par translation  $u(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  est indépendant de  $\mathbf{r}$ , donc  $D(\mathbf{r}) = D(\mathbf{r} = 0) = D$ . Finalement les équations de la théorie auto-cohérente pour une onde monochromatique sont [46, 47]

$$-D \Delta_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_B} \left( 1 + \frac{2c}{k} u(\mathbf{r} = 0, \mathbf{r} = 0) \right). \quad (\text{A.25})$$

## A.2 Expression de la longueur de localisation

La longueur de localisation peut maintenant être calculée. En prenant la transformée de Fourier spatial de l'Eq. (A.24) (avec  $\mathbf{r}' = 0$ )

$$u(D, \mathbf{q}) = \int u(D, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} d^2 \mathbf{r}, \quad (\text{A.26})$$

$$u(D, \mathbf{q}) = \frac{1}{Dq^2}. \quad (\text{A.27})$$

Il vient

$$u(D, \mathbf{r} = 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{Dq^2}. \quad (\text{A.28})$$

L'Eq. (A.28) introduite dans l'Eq. (A.25) donne

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{D_B} \frac{2c^2}{(2\pi)^2 \omega} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{Dq^2}. \quad (\text{A.29})$$

La correction de  $D$  à  $D_B$  est supposée petite,  $D$  peut être approximé par  $D_B$  dans l'intégrale de l'Eq. (A.29). L'Eq. (A.29) devient ainsi

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{D_B} \frac{2c}{\pi \omega \ell_B} \int \frac{dq}{q}. \quad (\text{A.30})$$

L'intégrale dans le membre de droite de l'Eq. (A.30) est divergente, cependant la borne supérieure ne peut pas être infinie car la diffusion a nécessairement une longueur minimale qui ne peut être que  $\ell_B$ . De même pour la borne inférieure, il existe une longueur maximale  $L$  correspondant à la taille de l'espace exploré par les ondes,  $L$  peut donc être associée à la longueur de localisation  $\xi$ . Avec ces arguments, l'Eq. (A.30) est réécrite

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_B} + \frac{1}{D_B} \frac{2c}{\pi \omega \ell_B} \int_{\xi^{-1}}^{\ell_B^{-1}} \frac{dq}{q}. \quad (\text{A.31})$$

La correction étant supposé petite, un développement limité dans l'Eq. (A.31) est valable

$$D = D_B \left[ 1 - \frac{2}{\pi k \ell_B} \ln \left( \frac{\xi}{\ell_B} \right) \right]. \quad (\text{A.32})$$

La localisation se produit pour  $D$  égal à zéro, afin d'obtenir un ordre de grandeur de  $\xi$ , l'Eq. (A.32) est considérée encore valable et donc

$$0 = 1 - \frac{2}{\pi k \ell_B} \ln \frac{\xi}{\ell_B}. \quad (\text{A.33})$$

Un ordre de grandeur pour la longueur de localisation  $\xi$  est ainsi obtenu

$$\boxed{\xi = \ell_B e^{\frac{\pi}{2} k \ell_B}}. \quad (\text{A.34})$$





## Annexe B

# Évaluation numérique de fonctions de corrélations de paire pour un milieu désordonné corrélé

Le but de cette annexe est de montrer comment sont évaluées les fonctions de corrélation de paire. Cette méthode est appliquée ici au cas de particules interagissant selon un potentiel de sphères dures, mais la méthode présentée est valide pour tous les cas de figure. Pour rappel, la fonction de corrélation de paire donne la probabilité  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  qu'un point se situe en  $\mathbf{r}'$  sachant qu'un autre point est en  $\mathbf{r}$  selon

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(\mathbf{r})P(\mathbf{r}')[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \quad (\text{B.1})$$

où  $P(\mathbf{r})$  est la distribution de probabilité pour un point de se trouver en  $\mathbf{r}$ , en général  $P(\mathbf{r}) = 1/V$  est satisfaisant pour un système statistiquement homogène, dans la suite pour éviter les effets de taille finie  $P(\mathbf{r})$  est légèrement modifiée. Aussi pour des systèmes suffisamment grands pouvant être considérés comme invariant par translation, on a  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Si de plus, le système est isotrope  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P(r)$ , avec  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

Numériquement, c'est la distribution de probabilité  $\mathcal{P}(r)$  pour que la distance entre deux points soit  $r$  qui est accessible. Avec les remarques précédentes, cette distribution de probabilité peut s'exprimer avec  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  selon

$$\mathcal{P}(r)dr = \int_{v_1} P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2, \quad (\text{B.2})$$

où  $v_1$  est l'ensemble des positions  $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  telles que  $r < |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < r + dr$ . Afin d'éviter les effets de taille finie, l'intégrale de l'Eq. (B.2) porte sur le volume  $V_{r_1} = 4\pi/3r_1^3$ . En utilisant l'invariance par translation il vient

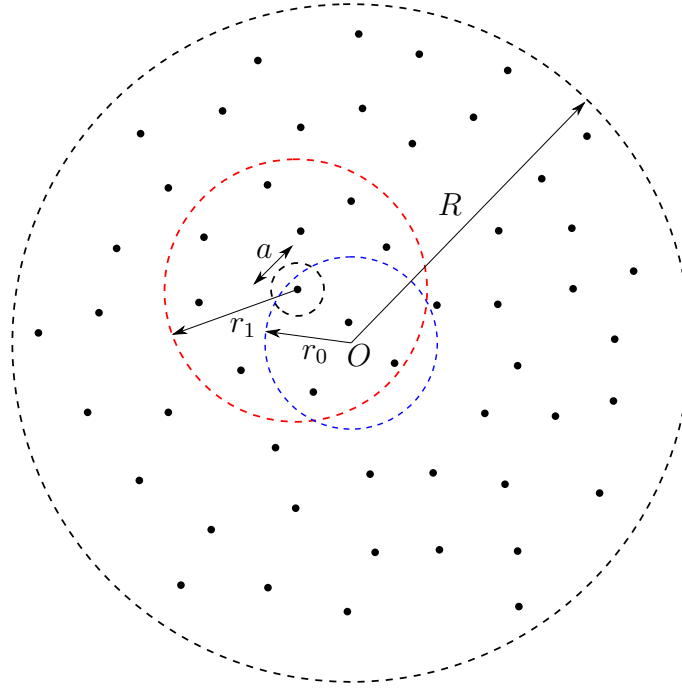
$$\mathcal{P}(r)dr = \int_r^{r+dr} P(r') V_{r_1} 4\pi r'^2 dr'. \quad (\text{B.3})$$

Finalement

$$\mathcal{P}(r) = 4\pi V_{r_1} r^2 P(r). \quad (\text{B.4})$$

$h(r)$  est donc donnée par

$$h(r) = \frac{V_{r_1}}{4\pi r^2} \mathcal{P}(r) - 1. \quad (\text{B.5})$$



**Figure B.1** – Exemple de configuration de points interagissant selon un potentiel de sphères dures. Le système est centré en  $O$  et son rayon est  $R$ . Les points, à partir desquels l'histogramme des distances est déterminé, sont contenus dans le cercle bleu de rayon  $r_0$ . Pour chaque point du cercle bleu l'histogramme des distances est calculé avec les points contenus dans le cercle rouge de rayon  $r_1$ . Le rayon d'exclusion entre les diffuseurs est  $a$ .

$\mathcal{P}$  est déterminée numériquement en générant des configurations corrélées et en classant les distances entre les points qui la composent dans un histogramme  $H$ . La procédure numérique est décrite à l'aide de la configuration présentée sur la Fig. B.1 qui illustre les notations utilisées ci-après.

Considérons un point  $A$  tel que  $OA < r_0$ , pour tout point  $B$  de la configuration la distance  $AB$  est calculée. Si  $AB < r_1$  alors  $H(j+1) = H(j+1) + 1$ , où  $j = E(AB/\Delta r)$ ,  $\Delta r$  correspond à la discrétisation avec laquelle  $h$  est obtenue. Si  $B$  est tel  $AB > r_1$  alors la distance  $AB$  n'est pas considérée dans l'histogramme. Cette procédure est effectuée pour tous les points  $A$  tel que  $OA < r_0$ . Cette méthode permet d'éviter les effets de taille finie et d'accélérer la convergence du calcul en considérant un grand nombre de points par configuration. Dans la pratique prendre  $r_0 = R/10$  et  $r_1 = 5a$  est suffisant. La distribution de probabilité  $\mathcal{P}$  est alors

$$\mathcal{P}(r) = \frac{H(r)}{n\Delta r}, \quad (\text{B.6})$$

où  $n$  est le nombre total de distances considérées au cours de la procédure. Aussi  $H$  est un tableau,  $H(r)$  désigne donc une fonction étagée construite à partir du tableau  $H$ . La fonction de corrélation de paire est alors déterminée, dans la pratique elle se calcule comme

$$h(j\Delta r) = \frac{r_1^3 \Delta r}{[(j+1)\Delta r]^3 - [j\Delta r]^3} \mathcal{P}(j\Delta r) - 1. \quad (\text{B.7})$$

Pour  $r > r_1$ ,  $h(r)$  est prise égale à 0. Des exemples de fonctions de corrélation de paire sont donnés dans le chapitre 6.

# Bibliographie

- [1] A. Dubois, L. Vabre, A.-C. Boccara, and E. Beaurepaire, High-resolution full-field optical coherence tomography with Linnik microscope, *Appl. Opt.* **41**, 805 (2002).
- [2] A. Cazé, R. Pierrat, and R. Carminati, Near-field interactions and nonuniversality in speckle patterns produced by a point source in a disordered medium, *Phys. Rev. A* **82**, 043823 (2010).
- [3] I. M. Vellekoop and A. P. Mosk, Focusing coherent light through opaque strongly scattering media, *Opt. Lett.* **32**, 2309 (2007).
- [4] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan, Photonic crystals: putting a new twist on light, *Nature* **386**, 143 (1997).
- [5] M. Bellec, U. Kuhl, G. Montambaux, and F. Mortessagne, Topological Transition of Dirac Points in a Microwave Experiment, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 033902 (2013).
- [6] D. M. Maurice, The structure and transparency of the cornea, *J. Physiol* **136**, 263 (1957).
- [7] F. Pratesi, M. Burrelli, F. Riboli, K. Vynck, and D. S. Wiersma, Disordered photonic structures for light harvesting in solar cells, *Opt. Express*. **21**, 460 (2013).
- [8] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [9] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Disordered electronic systems, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).
- [10] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [11] R. L. Weaver, Anderson localization of ultrasound, *Wave motion* **12**, 129 (1990).
- [12] G. Maret, T. Sperling, W. Bührer, A. Lubatsch, R. Frank, and C. M. Aegerter, Inelastic scattering puts in question recent claims of Anderson localization of light, *Nature Photon.* **7**, 934 (2013).
- [13] F. Scheffold, R. Lenke, R. Tweer, and G. Maret, Localization or classical diffusion of light ?, *Nature* **398**, 206 (1999).
- [14] S. E. Skipetrov and I. M. Sokolov, Absence of Anderson Localization of Light in a Random Ensemble of Point Scatterers, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 023905 (2014).
- [15] C. T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, IEEE Press, New York (1993).
- [16] J. D. Jackson, *Électrodynamique classique*, Dunod, Paris (2001).
- [17] R. Carminati, A. Cazé, D. Cao, F. Peragut, V. Krachmalnicoff, R. Pierrat, and Y. De Wilde, Electromagnetic density of states in complex plasmonic systems, *Surf. Sci. Rep.* **70**, 1 (2015).
- [18] L. Novotny and B. Hecht, *Principle of Nano-Optics*, Cambridge University Press (2006).

- [19] V. Krachmalnicoff, E. Castanié, Y. De Wilde, and R. Carminati, Fluctuations of the Local Density of States Probe Localized Surface Plasmons on Disordered Metal Films, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 183901 (2010).
- [20] U. Frish, *La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques*, Institut d'Astrophysique (1967).
- [21] U. Frish, *Wave Propagation in Random Media. Volume 1*, In Bharuch-Reid editor, in Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Academic Press (1968).
- [22] J. van Bladel, Some remarks on Green's dyadic for infinite space, *IRE Trans. Antennas Propag.* **AP-9**, 563 (1961).
- [23] A. D. Yaghjian, Electric dyadic Green's functions in the source region, *Proceedings of the IEEE* **68**, 248 (1980).
- [24] R. Carmianti, J.-J. Greffet, C. Henkel, and J. M. Vigoureux, Radiative and non-radiative decay of a single molecule close to a metallic nanoparticle, *Opt. Commun.* **261**, 368–375 (2006).
- [25] F. J. Dyson, The S Matrix in Quantum Electrodynamics, *Phys. Rev.* **75**, 1736 (1949).
- [26] F. J. Dyson, The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, *Phys. Rev.* **75**, 486 (1949).
- [27] M. Lax, Multiple Scattering of Waves. II. The Effective Field in Dense Systems, *Phys. Rev.* **85**, 621 (1952).
- [28] R. V. Langmuir, Scattering of Laser Light, *Appl. Phys. Lett.* **2**, 29 (1963).
- [29] J. Percus and G. Yevick, Analysis of Classical Statistical Mechanics by Means of Collective Coordinates, *Phys. Rev.* **110**, 1 (1958).
- [30] E. Matteoli and G. A. Mansoori, A simple expression for radial distribution functions of pure fluids and mixtures, *J. Chem. Phys.* **103**, 4672 (1995).
- [31] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics, Volume 4*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [32] L. L. Foldy, The Multiple Scattering of Waves. I. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers, *Phys. Rev.* **67**, 107 (1945).
- [33] L. A. Apresyan and Y. A. Kravtsov, *Radiation Transfer: Statistical and Wave Aspects*, Gordon and Breach, Amsterdam (1996).
- [34] U. Frisch, *Wave Propagation in Random Media, Probabilistic Methods in Applied Mathematics Vol. 1*, A. T. Bharucha-Reid, New York (1968).
- [35] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Dover, New-York (1950).
- [36] K. M. Case and P. F. Zweifel, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1967).
- [37] A. Lagendijk and B. A. van Tiggelen, Resonant multiple scattering of light, *Phys. Rep.* **270**, 143 (1996).
- [38] B. A. van Tiggelen and A. Lagendijk, Resonantly induced dipole-dipole interactions in the diffusion of scalar waves, *Phys. Rev. B* **50**, 16729 (1994).
- [39] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov, and B. A. van Tiggelen, Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network, *Nature Phys.* **4**, 945 (2008).

- [40] A. A. Chabanov, M. Stoytchev, and A. Z. Genack, Statistical signatures of photon localization, *Nature* **404**, 850 (2000).
- [41] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini, Localization of light in a disordered medium, *Nature* **390**, 671 (1997).
- [42] T. Sperling, L. Schertel, M. Ackermann, G. J. Aubry, C. M. Aegerter, and G. Maret, Can 3D light localization be reached in 'white paint'?, *New J. Phys.* **18**, 013039 (2016).
- [43] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [44] D. Vollhardt and P. Wölfle, Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in  $d \leq 2$  dimensions, *Phys. Rev. B* **22**, 4666 (1980).
- [45] P. Wölfle and D. Vollhardt, Self-Consistent Theory of Anderson Localization: General Formalism and Applications, *Int. J. Mod. Phys. B* **24**, 1526 (2010).
- [46] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Academic, New York (1995).
- [47] O. I. Lobkis and R. L. Weaver, Self-consistent transport dynamics for localized waves, *Phys. Rev. E* **71**, 011112 (2005).
- [48] P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, Macroscopic Approach to Multichannel Disordered Conductors, *Ann. Phys.* **181**, 290 (1988).
- [49] T. Martin and R. Landauer, Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems, *Phys. Rev. B* **45**, 1742 (1992).
- [50] C. W. J. Beenakker, Random-matrix theory of quantum transport, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 731 (1997).
- [51] O. N. Dorokhov, Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains, *JETP Lett.* **36**, 318 (1982).
- [52] L. S. Froufe-Pérez, P. García-Mochales, P. A. Serena, P. A. Mello, and J. J. Sáenz, Conductance Distributions in Quasi-One-Dimensional Disordered Wires, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 246403 (2002).
- [53] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, Effects of spin-orbit interactions in disordered conductors : A random-matrix approach, *Phys. Rev. B* **46**, 14985 (1992).
- [54] P. Sebbah, B. Hu, J. M. Klosner, and A. Z. Genack, Extended Quasimodes within Nominally Localized Random Waveguides, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 183902 (2006).
- [55] D. Laurent, O. Legrand, P. Sebbah, C. Vanneste, and F. Mortessagne, Localized Modes in a Finite-Size Open Disordered Microwave Cavity, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 253902 (2007).
- [56] F. Riboli, P. Barthelemy, S. Vignolini, F. Intonti, A. De Rossi, S. Combrie, and D. S. Wiersma, Anderson localization of near-visible light in two dimensions, *Opt. Lett.* **36**, 127 (2011).
- [57] A. Peña, A. Girschik, F. Libisch, S. Rotter, and A. A. Chabanov, The single-channel regime of transport through random media, *Nat. Commun.* **5**, 3488 (2014).
- [58] Z. Shi and A. Z. Genack, Transmission Eigenvalues and the Bare Conductance in the Crossover to Anderson Localization, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 043901 (2012).

- [59] M. Davy, Z. Shi, J. Wang, and A. Z. Genack, Transmission statistics and focusing in single disordered samples, *Opt. Express* **21**, 10367 (2013).
- [60] O. Leseur, R. Pierrat, J. J. Sáenz, and R. Carminati, Probing two-dimensional Anderson localization without statistics, *Phys. Rev. A* **90**, 053827 (2014).
- [61] D. J. Thouless, Maximum Metallic Resistance in Thin Wires, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1167 (1977).
- [62] A. Cazé, R. Pierrat, and R. Carminati, Strong Coupling to Two-Dimensional Anderson Localized Modes, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 053901 (2013).
- [63] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. A. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Torquato, and P. M. Chaikin, Improving the Density of Jammed Disordered Packings Using Ellipsoids, *Science* **303**, 990 (2004).
- [64] E. R. Chen, M. Engel, and S. C. Glotzer, Dense Crystalline Dimer Packing of Regular Tetrahedra, *Discrete Comput. Geom.* **44**, 253 (2010).
- [65] J.-P. Hansen and I. R. McDonald, *Theory of Simple Liquids*, Academic Press (2005).
- [66] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993).
- [67] L. Pietronero, A. Gabrielli, and F. S. Labini, Statistical Physics for cosmic structures, *Physica A* **306**, 395 (2002).
- [68] O. U. Uche, F. H. Stillinger, and S. Torquato, Constraints on collective density variables: Two dimensions, *Phys. Rev. E* **70**, 046122 (2004).
- [69] A. Donev, F. Stillinger, and S. Torquato, Unexpected Density Fluctuations in Jammed Disordered Sphere Packings, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090604 (2005).
- [70] A. Gabrielli, M. Joyce, and S. Torquato, Tilings of space and superhomogeneous point processes, *Phys. Rev. E* **77**, 031125 (2008).
- [71] C. E. Zachary, Y. Jiao, and S. Torquato, Hyperuniform Long-Range Correlations are a Signature of Disordered Jammed Hard-Particle Packings, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 178001 (2011).
- [72] R. Dreyfus, Y. Xu, T. Still, L. A. Hough, A. G. Yodh, and S. Torquato, Diagnosing hyperuniformity in two-dimensional, disordered, jammed packings of soft spheres, *Phys. Rev. E* **91**, 012302 (2015).
- [73] H. Hinrichsen, Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states, *Adv. Phys.* **49**, 815 (2000).
- [74] D. Hexner and D. Levine, Hyperuniformity of Critical Absorbing States, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 110602 (2015).
- [75] H. K. Kammler, G. Beaucage, R. Mueller, and S. E. Pratsinis, Structure of Flame-Made Silica Nanoparticles by Ultra-Small-Angle X-ray Scattering, *Langmuir* **20**, 1915 (2004).
- [76] S. Torquato and F. H. Stillinger, Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics, *Phys. Rev. E* **68**, 041113 (2003).
- [77] Y. Jiao, T. Lau, H. Hatzikirou, M. Meyer-Hermann, J. C. Corbo, and S. Torquato, Avian photoreceptor patterns represent a disordered hyperuniform solution to a multiscale packing problem, *Phys. Rev. E* **89**, 022721 (2014).

- [78] J. H. Weijs, R. Jeanneret, R. Dreyfus, and D. Bartolo, Emergent Hyperuniformity in Periodically Driven Emulsions, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 108301 (2015).
- [79] J. Haberkorn and F. Scheffold, Fabrication of mesoscale polymeric templates for three-dimensional disordered photonic materials, *Opt. Express* **21**, 1057 (2013).
- [80] O. U. Uche, S. Torquato, and F. H. Stillinger, Collective coordinate control of density distributions, *Phys. Rev. E* **74**, 031104 (2006).
- [81] R. D. Batten, F. H. Stillinger, and S. Torquato, Classical disordered ground states: Super-ideal gases and stealth and equi-luminous materials, *J. Appl. Phys.* **104**, 033504 (2008).
- [82] P. Sebbah, *Waves and Imaging through Complex Media*, Kluwer Academic, Dordrecht (2001).
- [83] J. M. Beckers, ADAPTIVE OPTICS FOR ASTRONOMY: Principles, Performance, and Applications, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **31**, 13 (1993).
- [84] M. Dupré, P. del Hougne, M. Fink, F. Lemoult, and G. Lerosey, Wave-Field Shaping in Cavities: Waves Trapped in a Box with Controllable Boundaries, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 017701 (2015).
- [85] S. F. Liew, J. Forster, H. Noh, C. F. Schreck, V. Saranathan, X. Lu, L. Yang, R. O. Prum, C. S. O'Hern, E. R. Dufresne, and H. Cao, Short-range order and near-field effects on optical scattering and structural coloration, *Opt. Express* **19**, 8208 (2011).
- [86] J.-K. Yang, C. Schreck, H. Noh, S.-F. Liew, M. I. Guy, C. S. O'Hern, and H. Cao, Photonic-band-gap effects in two-dimensional polycrystalline and amorphous structures, *Phys. Rev. A* **82**, 053838 (2010).
- [87] A. Yamilov and H. Cao, Density of resonant states and a manifestation of photonic band structure in small clusters of spherical particles, *Phys. Rev. B* **68**, 085111 (2003).
- [88] K. Edagawa, S. Kanoko, and M. Notomi, Photonic Amorphous Diamond Structure with a 3D Photonic Band Gap, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013901 (2008).
- [89] M. Rechtsman, A. Szameit, F. Dreisow, M. Heinrich, R. Keil, S. Nolte, and M. Segev, Amorphous Photonic Lattices: Band Gaps, Effective Mass, and Suppressed Transport, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 193904 (2011).
- [90] C. Jin, X. Meng, B. Cheng, Z. Li, and D. Zhang, Photonic gap in amorphous photonic materials, *Phys. Rev. B* **63**, 195107 (2001).
- [91] G. M. Conley, M. Burrelli, F. Pratesi, K. Vynck, and D. S. Wiersma, Light Transport and Localization in Two-Dimensional Correlated Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 143901 (2014).
- [92] E. Fratini and S. Pilati, Anderson localization in optical lattices with correlated disorder, *Phys. Rev. A* **92**, 063621 (2015).
- [93] W. Man, M. Florescu, K. Matsuyama, P. Yadak, G. Nahal, S. Hashemizad, E. Williamson, P. Steinhardt, S. Torquato, and P. Chaikin, Photonic band gap in isotropic hyperuniform disordered solids with low dielectric contrast, *Opt. Express* **21**, 19972 (2013).
- [94] W. Man, M. Florescu, E. P. Williamson, Y. He, S. R. Hashemizad, B. Y. C. Leung, D. R. Liner, S. Torquato, P. M. Chaikin, and P. J. Steinhardt, Isotropic band gaps and freeform waveguides observed in hyperuniform disordered photonic solids, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **110**, 15886 (2013).
- [95] M. Florescu, P. J. Steinhardt, and S. Torquato, Optical cavities and waveguides in hyperuniform disordered photonic solids, *Phys. Rev. B* **87**, 165116 (2013).



- [96] T. Amoah and M. Florescu, High-Q optical cavities in hyperuniform disordered materials, *Phys. Rev. B* **91**, 020201 (2015).
- [97] M. Florescu, S. Torquato, and P. J. Steinhardt, Designer disordered materials with large, complete photonic band gaps, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **106**, 20658 (2009).
- [98] S. Fraden and G. Maret, Multiple Light Scattering From Concentrated, Interacting Suspensions, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 512 (1990).
- [99] P. M. Saulnier, M. P. Zinkin, and G. H. Watson, Scatterer correlation effects on photon transport in dense random media, *Phys. Rev. B* **42**, 2621 (1990).
- [100] R. D. Schaller, M. Sykora, J. M. Pietryga, and V. I. Klimov, Seven Excitons at a Cost of One: Redefining the Limits for Conversion Efficiency of Photons into Charge Carriers, *Nano Lett.* **6**, 424 (2006).
- [101] J. M. Zahler, K. Tanabe, C. Ladous, T. Pinnington, F. D. Newman, and H. A. Atwater, High efficiency InGaAs solar cells on Si by InP layer transfer, *Appl. Phys. Lett.* **91**, 012108 (2007).
- [102] C. G. Granqvist, Transparent conductors as solar energy materials: A panoramic review, *Sol. Energ. Mat. Sol. Cells* **91**, 1529 (2007).
- [103] G. F. Brown and J. Wu, Third generation photovoltaics, *Laser & Photon. Rev.* **3**, 394 (2009).
- [104] H.-Y. Chen, J. Hou, S. Zhang, Y. Liang, G. Yang, Y. Yang, Y. Luping, Y. Wu, and G. Li, Polymer solar cells with enhanced open-circuit voltage and efficiency, *Nature Photon.* **3**, 649 (2009).
- [105] F. C. Krebs, Fabrication and processing of polymer solar cells: A review of printing and coating techniques, *Sol. Energ. Mat. Sol. Cells* **93**, 394 (2009).
- [106] V. M. Andreev, V. A. Grilikhes, V. P. Khvostikov, O. A. Khvostikova, V. D. Rumyantsev, N. A. Sadchikov, and M. Z. Shvarts, Concentrator PV modules and solar cells for TPV systems, *Sol. Energ. Mat. Sol. Cells* **84**, 3 (2004).
- [107] P. Spinelli, M. A. Verschuuren, and A. Polman, Broadband omnidirectional antireflection coating based on subwavelength surface Mie resonators, *Nat. Commun.* **3**, 692 (2012).
- [108] Y. Park, E. Drouard, O. El Daif, X. Letartre, P. Viktorovitch, A. Fave, A. Kaminski, M. Lemitte, and C. Seassal, Absorption enhancement using photonic crystals for silicon thin film solar cells, *Opt. Express* **17**, 14312 (2009).
- [109] S. E. Han and G. Chen, Optical Absorption Enhancement in Silicon Nanohole Arrays for Solar Photovoltaics, *Nano Lett.* **10**, 1012 (2010).
- [110] H. A. Atwater and A. Polman, Plasmonics for improved photovoltaic devices, *Nature Mater.* **9**, 205 (2010).
- [111] V. E. Ferry, M. A. Verschuuren, M. C. van Lare, R. E. I. Schropp, H. A. Atwater, and A. Polman, Optimized Spatial Correlations for Broadband Light Trapping Nanopatterns in High Efficiency Ultrathin Film a-Si:H Solar Cells, *Nano Lett.* **11**, 4239 (2011).
- [112] X. Meng, G. Gomard, O. El Daif, E. Drouard, R. Orobtcouk, A. Kaminski, A. Fave, M. Lemitte, A. Abramov, P. Roca i Cabarrocas, and C. Seassal, Absorbing photonic crystals for silicon thin-film solar cells: Design, fabrication and experimental investigation, *Sol. Energ. Mat. Sol. Cells* **95**, 32 (2011).

- [113] S. B. Mallick, M. Agrawal, A. Wangperawong, E. S. Barnard, K. K. Singh, R. J. Visser, M. L. Brongersma, and P. Peumans, Ultrathin crystalline-silicon solar cells with embedded photonic crystals, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 053113 (2012).
- [114] Z. Yu, A. Raman, and S. Fan, Fundamental limit of nanophotonic light trapping in solar cells, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **107**, 17491 (2010).
- [115] D. M. Callahan, J. N. Munday, and H. A. Atwater, Solar Cell Light Trapping beyond the Ray Optic Limit, *Nano Lett.* **12**, 214 (2012).
- [116] A. Bozzola, M. Liscidini, and L. C. Andreani, Photonic light-trapping versus Lambertian limits in thin film silicon solar cells with 1D and 2D periodic patterns, *Opt. Express* **20**, 224 (2012).
- [117] C. Rockstuhl, S. Fahr, K. Bittkau, T. Beckers, R. Carius, F.-J. Haug, T. Söderström, C. Ballif, and F. Lederer, Comparison and optimization of randomly textured surfaces in thin-film solar cells, *Opt. Express* **18**, 335 (2010).
- [118] A. Oskooi, P. A. Favuzzi, Y. Tanaka, H. Shigeta, Y. Kawakami, and S. Noda, Partially disordered photonic-crystal thin films for enhanced and robust photovoltaics, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 181110 (2012).
- [119] P. Kowalczewski, M. Liscidini, and L. C. Andreani, Engineering Gaussian disorder at rough interfaces for light trapping in thin-film solar cells, *Opt. Lett.* **37**, 4868 (2012).
- [120] K. Vynck, M. Burrese, F. Riboli, and D. S. Wiersma, Photon management in two-dimensional disordered media, *Nature Mater.* **11**, 1017 (2012).
- [121] M. Burrese, F. Pratesi, K. Vynck, M. Prasciolu, M. Tormen, and D. S. Wiersma, Two-dimensional disorder for broadband, omnidirectional and polarization-insensitive absorption, *Opt. Express* **21**, 268 (2013).
- [122] R. Mupparapu, K. Vynck, T. Svensson, M. Burrese, and D. S. Wiersma, Path length enhancement in disordered media for increased absorption, *Opt. Express* **23**, 1472 (2015).
- [123] M. Aeschlimann, T. Brixner, D. Differt, U. Heinzmann, M. Hensen, C. Kramer, F. Lückermann, P. Melchior, W. Pfeiffer, M. Piecuch, C. Schneider, H. Stiebig, C. Strüber, and P. Thielen, Perfect absorption in nanotextured thin films via Anderson-localized photon modes, *Nature Photon.* **9**, 663 (2015).
- [124] J. Huang, C. Liu, Y. Zhu, S. Masala, E. Alarousu, Y. Han, and A. Fratalocchi, Harnessing structural darkness in the visible and infrared wavelengths for a new source of light, *Nature Nanotech.* **11**, 60 (2016).
- [125] S. Durant, O. Calvo-Perez, N. Vukadinovic, and J.-J. Greffet, Light scattering by a random distribution of particles embedded in absorbing media: diagrammatic expansion of the extinction coefficient, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 2943 (2007).
- [126] S. Durant, O. Calvo-Perez, N. Vukadinovic, and J.-J. Greffet, Light scattering by a random distribution of particles embedded in absorbing media: full-wave Monte Carlo solutions of the extinction coefficient, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 2953 (2007).
- [127] I. Baydoun, D. Baresch, R. Pierrat, and A. Derode, Scattering mean free path in continuous complex media: Beyond the Helmholtz equation, *Phys. Rev. E* **92**, 033201 (2015).
- [128] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and A. Tip, Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3D slabs, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 7653 (1990).

- [129] S. Blanco and R. Fournier, An invariance property of diffusive random walks, *Europhys. Lett.* **61**, 168 (2003).
- [130] R. Pierrat, P. Ambichl, S. Gigan, A. Haber, R. Carminati, and S. Rotter, Invariance property of wave scattering through disordered media, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **111**, 17765 (2014).
- [131] M. Boffety, M. Allain, A. Sentenac, M. Massonneau, and R. Carminati, Analysis of the depth resolution limit of luminescence diffuse optical imaging, *Opt. Lett.* **33**, 2290 (2008).
- [132] T. Chaigne, O. Katz, A. C. Boccara, M. Fink, E. Bossy, and S. Gigan, Controlling light in scattering media non-invasively using the photoacoustic transmission matrix, *Nature Photon.* **8**, 58 (2014).
- [133] S. Farahi, G. Montemezzani, A. A. Grabar, J.-P. Huignard, and F. Ramaz, Photorefractive acousto-optic imaging in thick scattering media at 790 nm with a  $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{S}_6\text{:Te}$  crystal, *Opt. Lett.* **35**, 1798 (2010).
- [134] J. Bertolotti, E. G. van Putten, C. Blum, A. Lagendijk, W. L. Vos, and A. P. Mosk, Non-invasive imaging through opaque scattering layers, *Nature* **491**, 232 (2012).
- [135] K. Suhling, P. M. W. French, and D. Phillips, Time-resolved fluorescence microscopy, *Photochem. Photobiol. Sci.* **5**, 13 (2005).
- [136] M. D. Birowosuto, S. E. Skipetrov, W. L. Vos, and A. P. Mosk, Observation of Spatial Fluctuations of the Local Density of States in Random Photonic Media, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 013904 (2010).
- [137] L. S. Froufe-Pérez, R. Carminati, and J. J. Sáenz, Fluorescence decay rate statistics of a single molecule in a disordered cluster of nanoparticles, *Phys. Rev. A* **76**, 013835 (2007).
- [138] R. Sapienza, P. Bondareff, R. Pierrat, B. Habert, R. Carminati, and N. F. van Hulst, Long-Tail Statistics of the Purcell Factor in Disordered Media Driven by Near-Field Interactions, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 163902 (2011).
- [139] L. S. Froufe-Pérez and R. Carminati, Lifetime fluctuations of a single emitter in a disordered nanoscopic system: The influence of the transition dipole orientation, *Phys. Stat. Sol. (a)* **205**, 1258 (2008).
- [140] S. E. Skipetrov and R. Maynard, Nonuniversal correlations in multiple scattering, *Phys. Rev. B* **62**, 886 (2000).
- [141] B. Shapiro, New Type of Intensity Correlation in Random Media, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4733 (1999).
- [142] W. K. Hildebrand, A. Strybulevych, S. E. Skipetrov, B. A. van Tiggelen, and J. H. Page, Observation of Infinite-Range Intensity Correlations above, at, and below the Mobility Edges of the 3D Anderson Localization Transition, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 073902 (2014).
- [143] D. Vollhardt and P. Wölfle, *Self-Consistent Theory of Anderson Localization*, Elsevier Science, Amsterdam (1992).
- [144] B. A. van Tiggelen, A. Lagendijk, and D. S. Wiersma, Reflection and Transmission of Waves near the Localization Threshold, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4333 (2000).
- [145] N. Cherroret and S. E. Skipetrov, Microscopic derivation of self-consistent equations of Anderson localization in a disordered medium of finite size, *Phys. Rev. E* **77**, 046608 (2008).

- [146] S. Hikami, Anderson localization in a nonlinear- $\sigma$ -model representation, *Phys. Rev. B* **24**, 2671 (1981).
- [147] R. Berkovits and S. Feng, Correlations in coherent multiple scattering, *Phys. Rep.* **238**, 135 (1994).